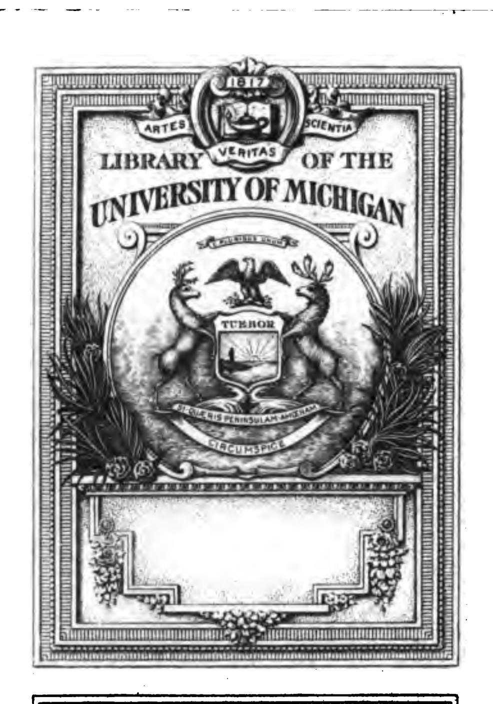

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Ausführliches Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

zum Selbstunterricht

und

mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Es giebt keinen Königsweg zur Mathematik.
Eukliede.

Fünfzehnte unveränderte Auflage.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1872.

Einem ist sie die hohe, die himmlische Göttin, dem Andern
Eine tüchtige Kuh, die ihn mit Butter versorgt.

Schiller.

und höhere Geometrie ausgesprochen und mich wiederholt gebeten, noch andere mathematische Wissenschaften in derselben Weise zu bearbeiten. Dass mir diese Anerkennung von Schülern, eben weil es mich überzeugt, dass ich etwas genützt habe, weit lieber sein muss, als selbst ganz tadelfreie, nur lobende Recensionen (wie der im Gersdorf'schen Repertorium), ist wohl natürlich. Und wer da weiss, wie viel mehr Mühe es macht, abstracte Sachen populair, d. h. möglichst deutlich und leicht, als bloss richtig darzustellen, wird mir dieses Bewusstsein wohl gönnen. Und so hoffe ich denn, dass diese neue Ausgabe ihren Zweck: zur Verbreitung der reellen Wissenschaften beizutragen, noch mehr als die erste erreichen und besonders denen nützlich sein wird, welche sich, sei es practischen oder rein wissenschaftlichen Interesses halber, ohne Hülfe eines Lehrers, mit diesen Wissenschaften befreunden wollen, so wie auch den Schülern an öffentlichen Schulen, wegen des pag. 1 dieses Werkes, in der Note erwähnten Grundes.

Altona, den 2. Januar 1845.

Lübsen.

Vorwort zur dritten Auflage.

Bei dieser neuen Auflage sind die Druckfehler in der alten sorgfältig beseitigt und neue möglichst vermieden, ausserdem sind im Anhange noch ein paar Sätze, namentlich die *Bézout*'sche Eliminationsmethode, als unwichtig, gestrichen und dafür ein paar practisch wichtigere Sätze hinzugefügt worden.

Wie der Titel besagt und die Vorrede zur zweiten Auflage schon erwähnt, ist dies Buch für solche Schüler geschrieben, welche die Mathematik nicht als Zweck, sondern als Mittel betrachten, indem sie ausser dieser Wissenschaft noch mancherlei andere Sachen zu lernen und deshalb ihre Zeit zu berücksichtigen haben.

Dass dies kleine Werk vom Publicum beifällig aufgenommen ist und so nachsichtige und lobende Recensionen erfahren hat, wie die im zweiten Vorwort erwähnten, so wie die noch kürzlich im *Grunert*'schen Archiv der Mathematik und Physik erschienene, kann nur aufmunternd für mich sein, nicht aber, dass man anfängt, es zu plündern und mich schon einmal genöthigt hat, deshalb den Professor Dr. *M.* öffentlich eine Rüge zu ertheilen. Siehe den Hamburgischen Correspondenten 1850, Juli 24.

Hamburg, im Juni 1853.

Lübsen.

Bemerkungen.

1) Wer seine mathematischen Studien vorläufig auf das Allernothwendigste für den practischen Gebrauch beschränken will, kann die in den Anhang verwiesenen, jedoch immer im Text citirten strengeren Beweise und Ergänzungssätze ungelesen lassen.

2) In mathematischen Schriften pflegt man durch ein Sternchen (*) vor einem Satze anzudeuten, dass derselbe für Geübtere ist.

Ausführliches Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

zum Selbstunterricht.

Vorwort zur ersten Auflage.

Der Herr Verfasser dieses Werks hat mich ersucht, es mit ein paar Worten zu begleiten, da er bei seinem ersten schriftstellerischen Versuche einer Einführung bei denen zu bedürfen glaubt, die sich für die mathematischen Studien interessiren. — Obgleich ich nun dies Bedürfniss nicht einsehe, und obgleich es mir scheint, dass ein Mann. wie Herr Lübsen, der aus *Gaussens* Schule hervorgegangen, schon seit mehreren Jahren hier mit grossem Beifall und Erfolg in der Mathematik unterrichtet, keiner weitern Einführung bedarf, so macht es mir doch an der andern Seite viel Vergnügen, die Liebhaber der Mathematik, und vorzüglich die, welche sich durch eignes Studium bilden wollen, auf Herrn Lübsen's Handbuch aufmerksam zu machen, und es den Anfängern bestens zu empfehlen. Sie werden darin die Begriffe bestimmt und klar gefasst, und durch wohlgewählte Beispiele erläutert finden. Man kann von Herrn Lübsen sagen, dass er mit Erfolg gegen sich gearbeitet hat, indem das Buch die Hülfe des Lehrers, also auch seine eigene, überflüssig macht.

Altona 1835, März 6.

H. C. Schumacher.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Lies't man die Weltgeschichte nicht wie einen Roman, zum blossen Zeitvertreib und mit einer gewissen Neugierde, wie die darin auftretenden Staaten und Personen handeln und enden, was für Kriege sie führten, und mit welcher Grausamkeit — achtet man vielmehr auf das wahrhaft Erfreuliche, auf die steten reellen Fortschritte der Menschheit, der Civilisation und Cultur, so wird man bemerken, dass dies Alles mit der Zeit immer achtungswürdiger geworden ist. Sucht man dann die wahren Ursachen auf, wodurch die jetzt civilisirten Völker aus der anfänglichen, selbst noch im Mittelalter herrschenden Rohheit, Barbarei und Aberglauben herausgehoben, gebildeter, sittlicher und humaner geworden, so wird man bald finden, dass die Hauptthebel in der Buchdruckerkunst und in der allmäligen Entstehung und Vervollkommnung der exacten Wissenschaften und deren heilsamen Einfluss auf die geistige Richtung sowohl, als auf die verschiedenen Gewerbe, der Künste und nützlichen Erfindungen liegen. Und diese Wissenschaften, wodurch die Menschen von den rohesten Anfängen an, im Können und Wissen immer weiter gekommen, sind noch immerfort bestrebt, — nicht etwa, das nie dagewesene, nur erdichtete goldene Zeitalter zu erringen, wo die Menschen die Hände in den Schooss legen und sagen können: Tisch, decke dich! — sondern vernünftige Wünsche und Gedanken zu realisiren, und durch Beseitigung nicht nothwendiger Uebel, Besiegung der widerstrebenden, feindlichen Elemente, ein sicheres, menschenwürdiges Leben zu schaffen.

Wichtige Entdeckungen und nützliche Erfindungen sind zu allen Zeiten gemacht worden, im Vergleich mit frühern Zeiten aber, nie so viele und so grossartige, als in dem letzten Jahrhundert. Welche ungemein rasche Fortschritte die exacten Wissenschaften und gleichzeitig die Industrie und Technik in diesem verhältnissmässig kurzen Zeitraum von einem Menschenalter gemacht, und welchen heilsamen Einfluss dies auf die Civilisation und Cultur gehabt, ist aus der Geschichte jedem Gebildeten bekannt, der nicht mit der fixen Idee vom Zurückschreiten und Schlechterwerden der Menschheit behaftet ist. (Bis zu dem ältesten griechischen Schriftsteller, bis zu Hesiod hinauf, hört man weit grössere Klagelieder über die Hülflosigkeit, Noth und Ruchlosigkeit der Menschen, als jetzt.)

Die exacten Wissenschaften, deren grosse Wichtigkeit und absolute Unentbehrlichkeit jedem Gebildeten einleuchtet, haben ihr Licht schon fast in alle andere Wissenschaften und in jede bedeutende Werkstatt geworfen. Man kann wohl sagen, dass eine neue Zeit begonnen, seitdem Praxis und Theorie sich mit einander befreundet und verbunden, und die Practiker eingesehen haben, dass sie ohne Hülfe der Wissenschaft nur blosse Nachahmer bleiben oder im Finstern tappen müssten.

Auf die exacten Wissenschaften werden selten die Göthe'schen Worte Anwendung finden: „Was wir eben haben, gebrauchen wir nicht, und was wir eben gebrauchen, das haben wir nicht.“ Diese Wissenschaften haben sich bereits schon dermassen mit dem geistigen und practischen Leben verflochten, dass man fast über keinen Gegenstand von allgemeinem oder philosophischem Interesse sprechen kann, ohne Ausdrücke und Redensarten zu gebrauchen, die jedem durchaus unverständlich sein müssen, der nicht einigermassen mit diesen Wissenschaften vertraut ist.

Die meisten bedeutenden Gewerbe werden jetzt ganz anders betrieben, als früher; man sieht immer mehr ein, dass sie sich auf sichere wissenschaftliche Principien gründen lassen und dass sie,

zur sichern Betreibung und Benutzung aller Mittel und Vortheile, welche die täglich fortschreitenden und Neues bringenden exacten Wissenschaften gewähren, eine wissenschaftliche Bildung durchaus erfordern. — Zu dieser Erkenntniss kommen Manche, freilich oft mit Widerstreben und sehr unwillig über die vielen Neuerungen, Gelehrsamkeiten und grossen Anforderungen, erst in spätern Jahren und die Vernünftigern suchen dann durch mündlichen oder schriftlichen Unterricht mit mehr oder minder Glück nachzuholen, was sie in der Jugend leichtsinnig gering schätzten, oder wegen Mangel an Gelegenheit, nicht haben konnten.

Deshalb ist es auch gewiss nicht zu verantworten (denn es ist soviel, als den Fortschritten der Menschheit Hindernisse in den Weg legen), dass die, einem Jeden zur höhern Bildung dienenden, vielen aber practisch nützlichen und für jeden cultivirten Staat unentbehrlichen exacten Wissenschaften, an manchen sogenannten Gelehrten- und Real-Schulen noch so stiefmütterliche Pflege finden und während kaum noch so viel Zeit bleibt, von den allerwichtigsten, täglich, ja stündlich wachsenden reellen Wissenschaften, nur das Allernützlichste und Nothwendigste zu lernen, so viel kostbare Zeit auf Gegenstände verwandt wird, die eben so wenig zur wahren Geistesbildung gereichen, als einen reellen Nutzen gewähren.

Wie oft hört man nicht von Gebildeten und Gelehrten jedes Standes darüber Klage äussern, dass sie in ihrer Schulzeit keine Gelegenheit gehabt, die mathematischen und Naturwissenschaften zu lernen, dass sie nicht darauf aufmerksam gemacht worden, oder der Unterricht darin ihnen unverständlich gewesen, und die nun, noch in spätern Jahren, so viel nur ihre Verhältnisse es erlauben, sich mit Liebe und Eifer diesen Studien hingeben, sich über die geistreichen Schöpfungen wahrhaft grosser Intelligenzen und über die merkwürdigen, schönen Entdeckungen in den Naturwissenschaften freuen und gestehen, dass ihnen ein Vorhang vor den Augen weggezogen und eine neue Welt aufgeschlossen ist.

Welche materielle Wichtigkeit die exacten Wissenschaften für cultivirte Staaten haben, und welchen grossen Einfluss sie auf die Politik äussern, geht wohl aus den grossen Anstrengungen und Opfern hervor, die, besonders in neuern Zeiten, auf Gründung der, zur Pflege und Verbreitung dieser Wissenschaften bestimmten grossartigen Institute verwendet werden.

Die allgemeine Volksbildung in Frankreich ist seit Gründung der polytechnischen Schule bedeutend gestiegen. Ohne dieses grossartige Institut, welches Napoleon seine Henne mit goldenen Eiern nannte, hätte Frankreich nicht unternehmen und ausführen können, was es ausgeführt hat. (Hätten z. B. wohl die Maroccaner so in Frankreich auftreten können, wie Frankreich in Marocco, oder China in England, wie England in China?) Ausser diesem polytechnischen Institute hat Frankreich noch viele ähnliche und seit 1829 die école centrale, eigentlich ein Privatinstitut, das aber, sobald sich der grosse Nutzen herausstellte, von der Regierung beschützt wurde und worin nun alljährlich unbemittelte, aber fähige junge Leute auf Staatskosten zu Civil-Ingenieuren, zu Vorstehern bedeutender Manufacturen, Maschinen- und andern Fabriken, selbst, wenn sie Lehrfähigkeit zeigen, zu Professoren herangebildet werden. — Auf die Pflege und Verbreitung der Naturwissenschaften und mithin auch der Mathematik, sieht Frankreich sich schon lange genöthigt, alljährlich mehre Millionen zu verwenden.

In England giebt es ausser den vielen auf Staatskosten gegründeten polytechnischen Instituten noch viele solche Privatschulen und Journale, sogenannte wandernde Volksbibliotheken. Privatpersonen lassen auf ihre Kosten öffentliche Vorlesungen für Handwerker und Gewerbtreibende halten.

Um mit den Erfindungen und dem Fabrikwesen des Auslandes gleichen Schritt zu halten, hat die russische Regierung zu diesem Zweck ein grossartiges polytechnisches Institut in Petersburg gegründet.

In neuerer Zeit sind auch in Deutschland bedeutende Anstrengungen gemacht worden. Es sind bereits einige polytechnische Schulen entstanden. Namentlich hat wohl Preussen in dieser Hinsicht am meisten gethan. Denn selbst in sämmtliche sogenannte Gelehrtenschulen sind seit 1834 die reellen Wissenschaften eingeführt, und schon 1837 ist durch Minist. Rescript namentlich die auf die Mathematik zu verwendende Stundenzahl in den beiden obersten Classen erhöht. Auf die Verbesserung der sogenannten Real- und Bürgerschulen wird immer mehr Sorgfalt verwandt, und auch immer dafür gesorgt, dass jedes bestimmte Fach auch einen dieses Faches kundigen Lehrer erhält. Das preussische Ministerium hat kürzlich noch sogar einen Plan zur Gründung von Bauernschulen in allen Regierungsbezirken, sowie auch zur Errichtung von landwirthschaftlichen Academien ausarbeiten lassen. (Es scheint also, dass ein guter Landmann mit Lesen und Schreiben nicht mehr ausreicht. Möge die Wissenschaft recht bald über die widerstrebende Natur siegen, und den Acker zwingen, statt zehnfältig, hundertfältig zu tragen.

Die Thatsache, dass die genannten cultivirten Staaten, sowie auch die übrigen: Belgien, Holland, Schweiz, Sachsen, Oestreich, Baiern &c. für Hebung des Volksunterrichts und Verbreitung der reellen Wissenschaften sorgen und sorgen müssen, steht wohl fest, und dass, wo ein Staat sich in dieser Hinsicht noch lau zeigt, die Vertreter des Volks, die Landstände, ihre Ermahnungen und Vorschläge unermüdlich wiederholen, berichten uns die Zeitungen. So sehen wir also die cultivirten Staaten mit einander wetteifern, durch Verbesserung des Schulwesens und besondere Pflege der reellen und practisch nützlichen Wissenschaften in der Cultur noch immer höher zu steigen und dieselbe zu verbreiten.

Je rauher und unfruchtbarer eine Gegend, je dichter die Bevölkerung, je mehr müssen reelle Wissenschaften der Industrie und Technik zu Hülfe kommen. Hier kann das practische Leben und ein geordneter Staat die exacten Wissenschaften durchaus

nicht entbehren Beide, Theorie und Technik, müssen und werden sich immer mehr und mehr mit einander verbinden und sich gegenseitig animiren, und wir können es deshalb, besonders unbemittelten jungen Leuten jedes Standes, ihres eigenen Besten halber, nicht dringend genug an's Herz legen, ihre kostbare, nie wiederkehrende Zeit weise zu benutzen, auf das gewöhnliche Loos derjenigen zu blicken, welche sich dem Studium unfruchtbarer, nicht mehr zeitgemässer und das Herz nicht herzlicher machenden Gelehrsamkeiten hingaben, und deshalb ihre kostbare Musse nicht über triviale oder gar frivole Gegenstände zu verlieren, sondern sie möglichst auf Erwerbung wahrhaft nützlicher Kenntnisse zu verwenden. Die Concurrenz im bürgerlichen Leben wird oftmals sehr gross, daher die häufigen Wechselfälle. Man frage alte Leute, ob sie selbst und wie viele von ihren Jugendbekannten in demjenigen Stande geblieben sind, dem sie sich Anfangs gewidmet, ob nicht die bei weitem grössere Hälfte aus ihrer Bahn heraus in eine ganz andere gedrängt worden. Deshalb ist es gut, mehr als eine Kunst zu wissen. Jedenfalls können nützliche Kenntnisse dem Besitzer niemals schaden, ihm vielmehr nur zur wahren Bildung und zum Vergnügen gereichen.

Denn wer auch selbst nicht die Gabe empfangen, so glänzende Erfindungen und Entdeckungen zu machen, wie sie im letzten Jahrhundert gemacht worden, der kann sich doch über die Schöpfungen des menschlichen Geistes freuen, wie über Poesien und Melodien und mit einer gewissen, Hoffnung erregenden Genugthuung wahrnehmen, wie die Geisteskraft immer mehr Siege über das Materielle erlangt und hoffentlich einmal die bessere Zeit herbeiführen wird, welche Klopstock, Fichte und Herder prophezeit haben. Anscheinend ganz bizarre Ideen, welche die Alten für Poesien und Hirngespinnste erklärten, sind bereits verwirklicht.

Mit starken, unsichtbaren Banden ist unser Körper an die Erde gefesselt und dennoch hat der menschliche Geist Mittel gefunden, sich diesen Fesseln zu entwinden. In der Höhe des Flugs

hat er schon den stärksten Bewohner der Lüfte besiegt. Denn viel höher und viel schneller, als der Adler es vermag, steigt er himmelan über die Wolken empor, als wenn er schon Flügel hätte. Green kam bekanntlich 1836 mit seinem Luftschiff in 17 Stunden von London nach Nassau, oft in der Schwindel erregenden Höhe von 10000 Fuss über der Erde. Gay-Lussac erreichte mit seinem leichteren Schiff die Höhe von 23000 Fuss.

Man muss gegen die Alten gerecht sein, aber auch gegen die Neuern, und jene nicht auf Kosten der letztern überschätzen. Nach sechstausend Jahren wird man sicher von unsern jetzigen Kenntnissen keine sonderliche Notiz nehmen, vielleicht kaum von unserer Geschichte. Das ist nun einmal so: jedes folgende Geschlecht tritt dem vorhergehenden auf die Schultern und nimmt das Bessere, die reifen Gedanken und Erfahrungen mit hinüber, ohne sich nach den trivialen, verrosteten Sachen, Irrthümern und Narrheiten umzusehen. Jedes folgende Geschlecht erbt unbedingt vom vorhergehenden ein Capital, welches Zinseszinsen trägt. Ist nicht der Griechen und der Römer Geist über uns gekommen und hat nicht das uns überlassene Pfund, von der Zeit an, wo wir es empfangen, reiche Zinsen getragen, ja dergestalt gewuchert, dass, könnten die Alten einmal wieder aufstehen, den gegenwärtigen Zustand unserer Cultur wahrnehmen und mit dem ihrigen gehörig vergleichen, sie gewiss staunend die Hände über dem Kopfe zusammenschlagen und ausrufen würden: „Beim Zeus! einen solchen Fortschritt hätten wir nicht für möglich gehalten.“ In der That, man kehre die Zustände einmal um: Wären die Griechen und Römer gewesen, was wir jetzt sind, und wir dagegen jetzt, was jene waren; der Klagen und des Jammerns über Rückschritte und Verfall der Künste und Wissenschaften wäre dann kein Ende gewesen. Wie oft würde man sich, in den exacten Wissenschaften, auf: Newton, Laplace, Gauss..; in der Poesie, auf: Schiller, Göthe, Shakespeare..; in der Musik, auf: Mozart, Weber, Boieldieu.. und so in jeder andern Kunst und Wissenschaft auf

wahrhaft grosse Intelligenzen berufen haben! Und hätte es sich dann nicht der Mühe gelohnt, die Alten, d. h. die Deutschen, Franzosen und Engländer, emsig zu studiren und ihre Sprachen zu lernen?

Damals, damals, vor zweitausend Jahren, hätten wir dann gesagt, konnten die Menschen schon durch das unabsehbare, bahnlose Meer den rechten Weg steuern, durch die Luft schiffen, es gab so viele wundervolle Instrumente und Maschinen, wovon wir uns gar keine Vorstellung machen können. — Dampfwagen, die mit Windesschnelle fuhren, Fernröhre, mit welchen man fast in die Unendlichkeit reichen konnte, electrische Telegraphen, welche Raum und Zeit fast gänzlich vernichteten, als wenn Beides nur blosse Begriffe wären &c. &c. Kurzum, die Sehnsucht nach dem Alterthum würde in diesem Falle erklärlich gewesen sein, und dann hätte gewiss Keiner auf den Namen eines Gelehrten und Gebildeten Anspruch machen können, der nicht die Alten, d. h. die Deutschen, Franzosen und Engländer, studirt.

Ja, könnten die Alten wieder aufleben, sie würden gewisslich unsere Werke studiren und ihre Kinder auf unsere Schulen schicken.

Die reellen Wissenschaften haben durch ihre raschen Fortschritte und glänzenden Resultate sich in Respect gesetzt, sich viele und mächtige Freunde erworben. Man sieht jetzt ein, dass ohne alle Kenntniss derselben nicht von einer allgemeinen und höhern Bildung die Rede sein kann, dass — wie der Geschäftsführer der in Bremen versammelten Naturforscher, Herr Bürgermeister Smidt, sehr wahr bemerkte: „dass selbst den reellen Conflicten des Tages wohl auf keine andere Weise unparteiische und wirksame Schlichtung zu Theil werden könne, als durch Hülfe der Pfleger jener Wissenschaften, deren Streben, ihrer Natur nach, nur dahin gerichtet ist, die vorhandenen Knoten socialer Verhältnisse wahrhaft zu lösen. — Der nicht mehr zu vermeidende Uebergang der Handarbeit zur Maschinenthätigkeit (sagt er ferner) und was sich von Pauperismus &c. in seinem Gefolge zeigt, wo werden die heilenden Aerzte derselben anders zu finden sein, als in den

Reihen derer, die den Gang der Natur zu erforschen, ihre verborgenen Kräfte an's Licht zu bringen und das zweckmässigste Eintreten ihrer Vermittelung zu allgemeiner Anerkennung zu erheben vermögen? Ja, es wird der Tag kommen, und seine Morgenröthe winkt uns schon, wo die Grösse der Armeen und Flotten eines Staates zum Maassstabe seines Machtverhältnisses nicht mehr ausreicht, wo vielmehr die intellectuellen Kräfte, welche er aufzubieten vermag, um die Wissenschaft weiter zu bringen, in den Vordergrund seines Einflusses auf die Weltbegebenheit treten."

Diese Ansichten der Sache haben schon frühe in mir den Glauben erweckt, dass es etwas Verdienstliches sei, die grössere Verbreitung der reellen Wissenschaften zu befördern, und besonders die schwersten, aber auch das eigentliche Fundament derselben, die mathematischen nämlich, durch möglichst deutliche Vorträge dem grössern Publicum zugänglicher zu machen.

Schon bei der ersten Bearbeitung dieses Handbuches der Arithmetik und Algebra hatte ich mir das Ziel gesteckt, die practisch wichtigsten Lehren dieser Wissenschaften so gründlich und deutlich vorzutragen, dass ein junger Mensch von gewöhnlicher Fassungskraft, bei ernstlichem Willen, selbst ohne Hülfe eines Lehrers, sich darnach unterrichten könne.

Dass mir diese Arbeit einigermassen gelungen, dass sie etwas Eigenthümliches hat, und dass sie auch anerkannt ist, dürfte ich wohl schon daraus schliessen, dass mehrere Recensionsanstalten (das Gersdorf'sche Repertorium, die Götting'sche Gelehrten-, die Halle'sche Literatur-Zeitung, die Darmstädter allgemeine Schulzeitung u. m. a.) diese Arbeit lobend erwähnt und empfohlen haben, weit mehr aber aus dem gewiss viel gültigeren Urtheile derjenigen Personen, welche sich wirklich ohne alle Beihülfe darnach unterrichtet haben. Sowohl mündlich als schriftlich haben mir verschiedene, zum Theil ganz fremde Personen (Landleute, Schullehrer, Techniker und Studirte) von freien Stücken ihren Dank sowohl für diese Arbeit, als auch für meine Elementar-Geometrie, Trigonometrie

Vorbegriffe.

Könnte man der Mathematik eine Einleitung voranschicken, welche von dem mannichfaltigen Inhalte derselben einen ungefähren Begriff und eine Uebersicht gäbe, so würde die Aufzählung dieses Inhalts und ein flüchtiger Grundriss dieser merkwürdigen Schöpfung menschlichen Scharfsinns gewiss zur geistigen Erweckung dienen.

Solches ist aber, eben wegen der zu grossen Mannichfaltigkeit und ganz eigenthümlichen Beschaffenheit dieser Wissenschaft durchaus unmöglich. Wer nur den Anfang macht, wird begreifen, dass jede Unterhaltung über mathematische Gegenstände, also auch das Verstehen einer solchen Einleitung, schon eine gewisse Summe von Vorkenntnissen voraussetzt. Keiner kann — um nur ein dem Anfänger verständliches Beispiel zu wählen — ohne Kenntniss des Zahlensystems die Addition, ohne diese nicht die Multiplication, ohne diese wiederum nicht die Division begreifen. So sieht es aber in der ganzen Mathematik aus; die Begriffe liegen in einander und fliessen aus einander. Von den einfachsten Sätzen steigt man nur stufenweise zu den höheren hinauf. Kein Satz kann gehörig verstanden werden, wenn man nicht alle vorhergehenden, mit welchen er zusammenhängt und gleichsam eine Kette bildet, gehörig verstanden hat. * Zudem bezeichnet das Wort Mathematik nicht

* Die Mathematik ist eine Wissenschaft aus reinen Begriffen, daher abstract, und nicht so leicht fasslich zu lehren und zu lernen als andere Wissenschaften, in welchen die Begriffe neben einander liegen und die meistens nur das Gedächtniss, den Verstand und Scharfsinn aber wenig in Anspruch nehmen und üben. Beim Unterricht in der Mathematik wird von Seiten des Schülers eine gewisse Thätigkeit des Geistes und eine ununterbrochene Aufmerksamkeit gefordert, die jedoch selbst der gewandteste Lehrer nicht immer in Spannung erhalten kann. Hat nun der Schüler einen Satz überhört, nicht recht verstanden, oder wegen Abwesenheit nicht hören können, so hat er den Faden verloren, und kann dann auch, wegen des Zusammenhangs der Sätze, keinen der folgenden verstehen.— Störungen und Unterbrechungen sind aber da, wo mehrere Schüler am Unterricht Theil nehmen, nie ganz zu vermeiden, und sonach begreift auch der Nichtmathematiker, dass, wenn dessen ungeachtet die Mathematik dennoch auch auf Schulen mit Erfolg gelehrt werden soll, der Schüler nicht etwa einen Leitfaden, Compendium (welches für den ersten Anfänger nicht viel besser als ein Register ist), sondern ein ausführliches, leicht verständliches Lehrbuch haben muss, um

eine, sondern mehrere verschiedene, täglich wachsende, unbegrenzte Wissenschaften (Arithmetik, Geometrie, Mechanik, Optik, Astronomie &c. &c.), deren blosse Aufzählung und Eintheilung jedoch dem Anfänger nichts nützt.

Was Mathematik ist, und ob schon deren Besitz allein oder deren Anwendung ein ernstliches Studium hinlänglich lohne, das kann man erst nach und nach erfahren, indem man sie ernstlich studirt. Soviel können wir aber im Voraus versichern, dass für Jedermann jede auf Mathematik und Naturwissenschaften verwandte Stunde bleibenden Nutzen hat für's geistige und practische Leben zugleich.

Folgende Erläuterungen mögen indessen zur Vorbereitung dienen, um die ersten sich auf Grössen beziehenden Grundbegriffe, von welchen die mathematischen Betrachtungen ausgehen, noch besonders hervorzuheben:



I. Keine Sache ist an sich weder gross noch klein; dies wird sie erst durch Vergleichung mit einer andern gleichartigen Sache. Sagt z. E. Jemand, das ist ein grosses Haus, so hat er noch ein anderes im Sinne, womit er ersteres vergleicht. Eine solche unbestimmte Steigerung giebt aber noch keinen klaren Begriff von der eigentlichen Grösse (Quantum) einer Sache, indem das, was in einer Beziehung gross heisst, in einer andern wieder klein heissen kann. Damit dieser Begriff Bestimmtheit erhalte, ist offenbar erforderlich: erstens, eine bestimmte Vorstellung von der zum Maass (Einheit) genommenen Vergleichungsgrösse, zweitens eine bestimmte Vorstellung, wie oft dieses Maass in der damit verglichenen Grösse enthalten ist. Hat man z. E. von der Grösse (Länge) eines Fusses eine deutliche Vorstellung und weiss man, wie oft sie in dem Abstande zweier Oerter enthalten ist, so giebt die Vorstellung dieser Einheit (Fuss), verbunden mit der Vorstellung (Zahl), welche ihre Wiederholung angiebt, einen bestimmten Begriff von der Entfernung der beiden Oerter; und so mit allen übrigen Grössen, deren es sehr verschiedene Arten giebt. Man spricht z. B. von der Grösse einer Länge, Fläche, Kraft, Zeit, Wärme, Menge, Anzahl &c.

II. Alle Grössen haben aber das mit einander gemein, dass sie aus Theilen bestehen, und je nachdem diese Theile getrennt sind oder unmittelbar mit einander zusammenhängen, ist und heisst die Grösse **unstetig** oder **stetig**. Eine Anzahl z. B. ist eine unstetige Grösse, weil sie aus einzelnen nicht zusammenhängenden Theilen besteht. Erbsen, sagt ein alter Mathematiker, kann man nicht

---

darnach das, was er nicht recht verstanden, vergessen oder versäumt hat, so oft nachzulesen, als nöthig ist. Lehrbücher werden nicht für Lehrer, sondern für Schüler geschrieben, und müssen daher, ihrem Zwecke gemäss, der Fassungskraft des Schülers angemessen sein, den gewöhnlichen Grad von Aufmerksamkeit und Nachdenken berücksichtigen, und selbst solche kleine theoretische und practische Schwierigkeiten berühren, welche dem Kundigen schon in Fleisch und Blut verwandelt sind.

haspeln. Stetige Grössen dagegen sind: die Zeit, Linien, Flächen &c. Man kann sich z. B. eine Linie als aus mehreren kleineren Linien zusammengesetzt denken, so dass das Ende des einen Theils zugleich der Anfang des damit zusammenhängenden ist, und also alle Theile zusammen ein ununterbrochenes oder stetiges Ganze (Continuum) bilden.

III. Jede Grösse kann (unmittelbar) nur mit einer gleichartigen verglichen und ausgemessen werden. Anfänger müssen sich dieses wohl merken. Man kann z. B. die Zeit nicht wägen. Der Zeitmaassstab muss selbst eine Zeit, die Flächeneinheit eine Fläche, das Winkelmaass ein Winkel sein &c. Daher eben so viele verschiedenartige Einheiten, als verschiedenartige Grössen.

IV. Eine Einheit kann in kleinere aufgelöst und umgekehrt kann eine beliebige Anzahl gleichartiger Einheiten wieder als eine grössere Einheit betrachtet werden. Daher die verschiedenen einfachen und zusammengesetzten (niedern und höhern) Einheiten einerlei Art, z. B. Längen-Einheiten: Zoll, Fuss, Ruthe, Meile; Gewichts-Einheiten: Loth, Pfund, Centner; Zeit-Einheiten: Stunde, Tag, Jahr. Ueberhaupt wird in der Mathematik jede Grösse Einheit genannt, insofern sie als Vergleichungsgrösse oder Einheit dient.

V. Eine Anzahl ist nach dem Vorhergehenden eine unbestimmte, eine Zahl aber eine bestimmte Vielheit oder Ausdruck des Verhältnisses, welches eine Grösse zu der Einheit hat, mit welcher sie verglichen oder ausgemessen worden. Der Name, durch welchen die Grösse einer Zahl angegeben wird, heisst Zahlwort. Dieses giebt also an, wie oft die Einheit gesetzt oder wiederholt gedacht ist. Für jede besondere Zahl ist daher ein besonderes Zahlwort erforderlich. Da aber die Zahlenbegriffe sich bloss nach der in ihnen enthaltenen grössern oder kleinern Menge Einheiten unterscheiden, so ist es offenbar nicht genug, dass das Gedächtniss sich nur die besonderen Namen der Zahlen merkt, sondern es muss dies nothwendig auch in der natürlichen Aufeinanderfolge derselben geschehen, wornach jedes vom Gedächtniss aufgenommene Zahlwort nur eine Einheit mehr bezeichnet, als das nächst vorhergehende. So hat man z. B. von der Zahl fünf nur deshalb einen bestimmten Begriff, weil man ihn von der vorhergehenden Zahl vier hat &c. bis zu Anfang. Es würde nicht möglich sein, die Zahlenbildung in einer andern Folge, wie: fünf, drei, hundert, zwei &c. zu lehren. „Denn wenn das Erst' und Zweit' nicht wär', das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr."

VI. Die Zahlen in ihrer natürlichen Folge hersagen, oder Zahlen bilden, die nach und nach um eine Einheit wachsen, heisst zählen. Führt die Einheit, welche einer Zahl zum Grunde liegt, noch einen besondern Namen, so nennt man sie, so wie auch die Zahl, benannt. Drückt aber die Einheit überhaupt nur das einmalige Vorhandensein einer Sache aus, so ist sie, so wie auch

die daraus gebildete *Zahl*, *unbenannt*; *fünf Fuss* ist eine benannte, *fünf* aber eine unbenannte Zahl.

Derjenige Theil der gesammten Mathematik, welcher sich ausschliesslich mit der Ableitung und Verbindung der Zahlenbegriffe beschäftigt, führt den Titel *Arithmetik*. Ihre Grundbegriffe sind: *Grösse*, *Einheit*, *Vielheit*. Aus diesen höchst einfachen, jedem Menschen gleichsam angeborenen (einfachen und deshalb nicht weiter zu erklärenden) Vorstellungen muss sich die ganze Mathematik entwickeln.

Grössenkenntniss kann keiner entbehren, und da diese nur vermittelst der Zahlen möglich ist, so gehört auch die Zahlenbildung mit zu den ersten und nothwendigsten unserer geistigen Bedürfnisse; denn das erste kindliche Verfahren, eine Vielheit bei eins und eins und eins anzugeben, ist doch ein wenig gar zu natürlich und ungekünstelt.

Die Bildung der ursprünglich willkürlichen, auch in allen Sprachen verschieden lautenden Zahlwörter liegt eigentlich der Sprachlehre ob; weil aber doch ein gewisses mathematisches Verfahren dabei zu beachten ist, welches das Gedächtniss so wenig als möglich belästigt, so mag auch die Arithmetik die Bildung der Zahlwörter und Zahlzeichen als ihre erste Aufgabe übernehmen. Und damit nun in der Folge alles möglichst leicht und klar werde, wollen wir *nichts* als bekannt voraussetzen, uns daher absichtlich in den frühesten Zustand der Mathematik zurückdenken, mit der Erfindung des Zählens, also vom Ei an beginnen, und so nach und nach die ersten Pforten derjenigen Wissenschaft aufschliessen, welche uns mit dem Himmel in Verbindung setzt.

Erster Theil.

Specielle Arithmetik.

Erstes Buch.

Zahlenbildung und Zahlensystem.

1.

Die Vorstellung der Einheit oder das einmalige Vorhandensein einer Sache benennen wir mit dem Worte Eins. Die wiederholte Vorstellung der Einheit aber wollen wir mit einem einzigen, ursprünglich willkürlichen Worte (wie etwa zwei, duo, deux, two &c.) belegen, und statt eins und eins zu sagen: das kürzere Wort zwei aussprechen. Für die auf zwei folgende Zahl, nämlich zwei und eins, ist schon das Wort drei gewählt, welches wir also beibehalten. — So gehen wir nun schrittweise, jedesmal um eine Einheit weiter, und sagen vier statt drei und eins, fünf statt vier und eins, sechs, sieben, acht.... — Die durch lange Uebung im Gedächtniss behaltene Folge dieser Zahlwörter ist es aber eigentlich, wodurch wir uns der bestimmten Anzahl Einheiten, welche jedes Wort bezeichnet, schnell erinnern.

Es ist nicht schwer, auch für einige der nun folgenden Zahlen eigenthümliche Wörter zu finden, z. B. neun, zehn, elf, zwölf &c. allein auf diese Weise noch lange fortschreiten zu wollen, würde doch völlig unmöglich und unüberlegt sein; denn wo gäbe es wohl eine so fruchtbare Erfindungsgabe und ein so grosses Gedächtniss, alle sonach nöthig werdenden unzähligen Wörter zu ersinnen und zu behalten. Dennoch mag, wenn nicht, wie Josephus berichtet, Adam gleich als gelehrter Mathematiker geboren wurde, die Welt schon lange gestanden haben, bis Jemand den vernünftigen Gedanken fasste: um beim fernern Fortzählen der gar zu schnellen Anhäufung von Wörtern vorzubeugen, nur erst eine beliebig kurze Strecke zu zählen, z. B. bis zehn, und dann, ohne neue Wörter nöthig zu haben, die Verbindung der folgenden Einheiten mit dieser Zahl zehn durch das Wort und anzudeuten.

Statt also für die auf zehn folgende Zahl ein neues Wort zu wählen, sagte man: eins und zehn, darauf: zwei und zehn, drei und zehn &c. bis zehn und zehn. Dass man später das Wort und, der Kürze wegen, wieder wegwarf, war keine grosse Erfindung, und dass man noch später statt einszehn, zweizehn (undecim, duodecim) die etwas kürzeren Wörter: elf, zwölf einführte, war eine unnöthige Verbesserung, die, wenn man es bemerken will, der Jugend nur das Zählenlernen erschwert.

Die Zahl zehn kann man als eine aus einfachen Einheiten oder sogenannten Einern zusammengesetzte neue Einheit, Zehner genannt, betrachten, und darnach zählen (Vorbegr. VI), mithin statt zehn und zehn auch zweimalzehn sagen. Hierauf folgt also: eins und zweimalzehn, zwei und zweimalzehn..... zehn und zweimalzehn, dafür: dreimalzehn, ferner: eins und dreimalzehn &c. bis zehnmalzehn. Die Wörter zweimalzehn, dreimalzehn &c. bis neunmalzehn, wurden durch blosse Auslassung des Wortes „mal" und die kleine Veränderung der Silbe zehn in zig, in die etwas kürzern: zwanzig, dreizig &c. zusammengezogen; statt zehnmalzehn ist das neue Wort hundert eingeführt.

Von hier an wird nun, dem Sprachgebrauche gemäss, die grössere Zahl immer vor der kleinern ausgesprochen, also: hundert und eins, hundert und zwei u. s. f. bis hundert und hundert, dafür: zweihundert, indem man hundert wieder als eine Einheit, Hunderter, betrachtet. Ferner: zweihundert und eins &c. bis zehnmal hundert, wofür man das neue Wort tausend gebraucht. Die Zahl tausend betrachtet man wieder als eine neue Einheit, eben so die Zahlen zehntausend und hunderttausend, welche letzteren aber keine besondere Namen erhalten haben. Statt tausend mal tausend sagt man: Million, und für Million mal Million: Billion; für Million mal Billion: Trillion. Die nachfolgenden wenigen Wörter kann Jeder, der an solchen übersinnlichen Vorstellungen Vergnügen findet, nach dem angedeuteten Gange selbst bilden, nämlich: Quatrillion, Quintillion, Sextillion, Septillion, Octillion, Nonillion, Decillion, Undecillion, Duodecillion &c. &c. Diese letztgenannten Zahlwörter aber sind, schon von Trillion an, völlig überflüssig, weil sie nie vorkommen. Schon Billion ist eine wahre Unzahl, die man nur in seltenen Fällen gebraucht, wenn man z. B. die, wenn auch bestimmte, jedoch über alle deutliche Vorstellung gehende Entfernung der nächsten Fixsterne &c. kurz ausdrücken will.

2.

Auf diese Weise war es also möglich, alle denkbaren Zahlen mit sehr wenigen Wörtern bestimmt zu benennen. — Ursprünglich haben wir nur die zehn ersten und, wenn man die Wörter hundert, tausend, Million und höchstens noch Billion dazu rechnet, im Ganzen doch nur vierzehn Wörter zu erfinden brauchen, denn die übrigen, wie

Trillion, Quatrillion &c. gehören zum wissenschaftlichen Luxus. — Wir können schon geläufig zählen, indem wir es von Jugend auf nach und nach spielend lernten. Stellen wir uns aber den ersten Zustand der Wissenschaft recht lebhaft vor, so werden wir auch dieses offenbar nicht durch Zufall entstandene, sondern wohldurchdachte einfache Verfahren, die Zahlen leicht zu unterscheiden, zu würdigen wissen; wie leicht hätte nicht auch zur Qual unserer Jugend ein weit schwerer zu lernendes Verfahren entstehen können. (Siehe Anhang § 311.)

3.

Als man nun so mit dem Zählen auf's Reine gekommen war, dachte man auch auf Mittel, gewisse, ohne Zutreten der Kunst sehr beschwerliche oder gar unmögliche Rechnungen mit den Zahlen zu erleichtern. Anfangs und lange mögen sich unsere Vorfahren (die Europäer noch im 14ten Jahrhundert) mit einem mühsamen Zuzählen und Abzählen und einer gewissen Art Kopfrechnen beholfen haben, bis ein erfindungsreicher Geist, ein wahres mathematisches Genie, auf den glücklichen Gedanken kam, die Zahlenbegriffe durch ganz einfache Zeichen anzudeuten. — So wurde festgesetzt: das Zeichen 1 solle die Einheit bedeuten, das Zeichen 2 an die Zahl zwei erinnern, die Zeichen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die Zahlen drei bis neun darstellen.

Ursprünglich waren diese Zeichen ganz willkürlich; auch haben sie erst nach und nach ihre jetzige einfache Form erhalten. Man sagt, die Phönizier seien die Erfinder dieser Zeichen. Von diesem gebildeten Volke sollen die Araber sie bekommen, aber immer verheimlicht haben. Erst zur Zeit des Sarazenenkrieges sind diese Zeichen (von dem Europäer die arabischen Ziffern, von dem Araber selbst aber die indischen Buchstaben genannt) in Europa bekannt geworden. Etwas früher findet man wohl hie und da in Inschriften eine dunkle Spur derselben, ihr nützlicher und kunstgerechter Gebrauch war aber selbst im 15ten Jahrhundert noch Wenigen bekannt.

4.

So wie für die Zahlen von eins bis neun, hätte man auch leicht noch für einige der folgenden einfache Zeichen erfinden können, z. B. für zehn das Zeichen: †, für elf: ȝ, für zwölf: ⊖ &c. Allein auch hier würden Erfindungs- und Gedächtnisskraft nicht ausreichen, für jede besondere Zahl ein eigenthümliches Zeichen zu erfinden und zu behalten. Der höchst sinnreiche Einfall, diese Unmöglichkeit bloss durch systematische Stellung der Ziffern aufzuheben, zeugt wahrlich von grossem Scharfsinn.

Setzen wir z. B. fest, dass (in Uebereinstimmung mit unserm Verfahren zu zählen) die zehn einfachen Einheiten (Einer) zusammengefasst, als eine neue Einheit (Zehner) für sich betrachtet werden und, zur Unterscheidung von den einfachen Einheiten, eine

Einheit 1sten Ranges heissen soll; ferner zehn Einheiten ersten Ranges, oder zehn Zehner, d. h. die Zahl hundert, als eine neue Einheit 2ten Ranges anzusehen u. s. f., je zehn Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höheren Ranges gelten zu lassen, so dass also tausend eine Einheit des 3ten, zehntausend eine Einheit des 4ten, hunderttausend vom 5ten, Million vom 6ten Range wird &c., so können wir, bloss mit Hülfe der neun ersten Ziffern und des nachstehenden Systems, alle möglichen Zahlen auf eine höchst einfache und bestimmte Weise bezeichnen.

Jede der neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, deutet, allein stehend, durch ihre eigenthümliche Figur eine bestimmte Anzahl Einheiten an, sobald sie aber in verschiedene Plätze des Systems gesetzt werden, erhalten sie auch verschiedene Bedeutung, und die Ueberschriften geben dem Auge schnell zu erkennen, was für Einheiten sie darstellen, ob Hunderte, ob Tausende &c. Setzt man z. B. die Ziffer 6 in den dritten Rang, so stellt sie sechs Einheiten 3ten Ranges oder die Zahl sechstausend dar &c. Um die Zahl dreissigtausend mit Ziffern zu schreiben, setzt man die Ziffer 3 in den vierten Rang, weil dreissig tausend so viel ist, als 3 Einheiten vierten Ranges. Enthält eine Zahl verschiedene Einheiten, so setzt man für jede besondere Art die sie darstellende Ziffer gehörigen Orts hin. Es ist z. B. vier und dreissig tausend zweihundert sechs und fünfzig so viel, als: dreissigtausend, viertausend, zweihundert, fünfzig und sechs, wie bei (a). Eben so schreibt man die Zahl siebenhundert und neuntausend und fünf, wie bei (b), wo die Plätze des 1sten, 2ten und 4ten Ranges unbesetzt bleiben.

.	.	V. Rang Hndrttsd.	IV. Rang Zehntsd.	III. Rang Tausende	II. Rang Hunderte	I. Rang Zehner	Einer	
			3	4	2	5	6	a.
		7	...	9	...	...	5	b.

Sind zwischen den mit Ziffern besetzten Plätzen keine unbesetzt, wie bei (a), so wird der Rang einer jeden Ziffer schon durch die Anzahl der rechts auf sie folgenden bestimmt; so ist z. E. die Ziffer 5 bei (a) vom ersten Range, weil rechts nur noch eine Ziffer folgt. In diesem Falle also, wo alle Ränge vom höchsten an besetzt sind, kann man das Schema offenbar entbehren, und z. E. die Zahl bei (a) kürzer so schreiben: 34256, indem man den Rang einer jeden Ziffer sehr leicht (durch lange Uebung schon auf den ersten Blick) findet, wenn man die auf einander folgenden Ziffern, von der Rechten gegen die Linke (Einer, Zehner, Hunderte &c.) in Gedanken durchläuft. Selbst in den Fällen, wo, wie bei (b), ein oder mehrere Plätze unbesetzt sind, kann man das Schema dennoch weglassen, und den Ziffern dadurch ihren gehörigen Rang anweisen, indem man die auf sie folgenden leeren Plätze durch irgend ein beliebiges, an sich bedeutungsloses Zeichen besetzt. Man bedient

sich allgemein des kreisförmigen Zeichens 0, im Deutschen Null genannt (im Arabischen Zephirum, Zero, Ziffer). Die Zahl bei (b) kann man also kürzer so schreiben: 709005. Anfänger pflegen sich selten eine richtige Vorstellung von diesem Stellzeichen 0 zu machen. Es giebt, wie gesagt, nur den vorhergehenden Ziffern Rang und Bedeutung; auf die nachfolgenden aber hat es, als blosser Lückenbüsser, nicht den geringsten Einfluss.

5.

Eine jede mit beliebig vielen Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen, hat nunmehr gar keine Schwierigkeit. Man braucht sich nur die Aussprache einer sechsziffrigen Zahl zu merken und sich zu erinnern, dass man dem Sprachgebrauch zufolge, die Einer vor den Zehnern, und die Einheiten der Tausende, Zehntausende und Hunderttausende auf einmal ausspricht: z. B. 26 lies: sechs und zwanzig, und nicht, wie es nach dem Schema heissen müsste: zwanzig sechs (vingt-six); 326000 lies: dreihundert sechs und zwanzig tausend, und nicht: dreihundert tausend, zwanzig tausend, sechstausend. Beispiele:

51207, ein und fünfzig tausend zweihundert und sieben
509004, fünf hundert und neun tausend und vier
319039, dreihundertneunzehn tausend und neun und dreissig
100070, (ein) hunderttausend und siebzig
111111, (ein) hundert und elf tausend ein hundert und elf
555555, fünf hundert und fünf und fünfzig tausend fünf hundert und fünf und fünfzig
700009, siebenhunderttausend und neun.

Hat eine Zahl mehr als sechs Ziffern, so theile man sie, von der Rechten gegen die Linke, in Classen, deren jede sechs Ziffern enthält (die höchste, links stehende Classe kann aber auch weniger haben), dadurch sind dem Auge Haltpuncte gegeben, wornach es leicht die Einheiten des 6ten, 12ten, 18ten &c. Ranges (Million, Billion, Trillion &c.) erkennt. Dies geschehen, fange man bei der höchsten Classe an und spreche jede, als wenn sie ganz allein da stände, für sich aus, und setze am Ende einer jeden Classe nur noch den Namen derjenigen Einheit hinzu, deren Wiederholung sie darstellt. Beispiele:

Anzahl der Trillion	Anzahl der Billion	Anzahl der Million	
2073	975403	400064	507001

lies: zweitausend und drei und siebzig Trillionen, neun hundert fünf und siebzig tausend vier hundert und drei Billionen, vier hundert tausend und vier und sechszig Millionen, fünf hundert und sieben tausend und eins.

VI	V	IV	III	II	I	
35004	701020	000303	456007	897004	290001	311450

lies: 35004 Sextillionen, 701020 Quintillionen, 303 Quatrillionen, 456007 Trillionen, 897004 Billionen, 290001 Millionen, 311450.

Soll umgekehrt eine in Worten gegebene Zahl mit Ziffern dargestellt werden, so kann man die Plätze, welche die verschiedenen Einheiten einnehmen müssen, erst durch Puncte bezeichnen, und dann die Ziffern hineinschreiben.

III	II	I	
......	......	......	......

6.

Diese systematische Ordnung, nach welcher man mit wenigen Ziffern alle Zahlen darstellen kann, heisst ein Zahlensystem. Da bei unserm eben erklärten und wahrscheinlich ziemlich allgemein gebräuchlichen System, das ursprünglich willkürliche Gesetz zum Grunde gelegt worden: dass jede Einheit einer links stehenden Ziffer, zehnmal so gross ist, als eine Einheit der nächst rechts stehenden, so wird auch aus diesem Grunde die Zahl zehn die Grundzahl unsers Zahlensystems und das System selbst das Decimalsystem oder Dekadik genannt (δέκα, zehn).

Mit der schönen und nützlichen Erfindung des Zahlensystems, worüber selbst die grössten Männer, wie Newton, Leibnitz, Laplace, ihre Verwunderung und hohe Achtung bezeigt haben, war der Grund zur ganzen speciellen Arithmetik gelegt, die streng genommen, schon in jener Erfindung enthalten ist, und als unmittelbare Anwendung fast ganz von selbst daraus hervorgeht.

Dass wir beim Rechnen mit Ziffern dieselben immer rückwärts schreiben müssen, rührt daher, dass im Zahlensystem der Rang der Einheiten von der Rechten gegen die Linke steigt. Dies verräth den morgenländischen Ursprung und beweist wohl, dass die Morgenländer alle links gewesen sind. Wir aber, die wir gewohnt sind, mit der rechten Hand zu schreiben, müssen diese Ordnung unbequem finden, indem sie uns im schnellen und graden Schreiben der Ziffern wirklich hinderlich ist. Doch kann dieser kleine, wohl nur von Wenigen bemerkte Uebelstand leicht entschuldigt werden.

Die Griechen und Römer hatten kein solches wissenschaftlich gebildetes Zahlensystem und daher auch keine Arithmetik. Bei den Römern konnte noch ein Vormund, wegen gröblichen Betrugs vor Gericht gezogen, ungestraft mit der Entschuldigung frei kommen: er sei kein Rechnenkünstler, und das um so leichter, da gewisse lichtscheue Leute das Rechnen mit Ziffern für Zauberei und Sünde erklärten, die Mathematiker und Naturforscher, wie Galilei, Bruno u. A., denen die Menschheit sowohl in materieller als geistiger Hinsicht so viel zu verdanken hat (Befreiung von dem, die Welt verfinsternden Aberglauben, grausamen Hexenprocesse, Inquisition &c.), in den Kerker und auf den Scheiterhaufen warfen. (§ 312.)

Zweites Buch.

Von den vier Rechnungsarten.

---

1. Addition.

7.

Die erste Anwendung des Zahlensystems besteht darin, mehrere Zahlen mit einander zu vereinigen, oder in einem einzigen Zahlenbegriff zusammen zu fassen. Die Zahl, welche nach der Vereinigung entsteht, und allein so gross ist, oder dieselbe Menge Einheiten enthält, als alle gegebenen Zahlen (Pöste) zusammen, heisst die Summe, und das Verfahren, dieselbe auf eine kürzere Weise als durch das mühsame Zuzählen bei eins und eins zu finden, addiren. Dieses setzt voraus, dass man die Summe je zwei einziffriger Zahlen auswendig wisse. Die Addition kann keine besondere Erfindung genannt werden, weil ihr Verfahren ganz von selbst aus der Theorie des Zahlensystems folgt. Man schreibt nämlich die zu addirenden Zahlen so unter einander, dass nach dem Zahlensystem gleichnamige Rang-Einheiten unter einander stehen (Einer unter Einer, Zehner unter Zehner &c.) und addirt alsdann, bei den niedrigsten Einheiten anfangend, jede Reihe für sich, indem man für je zehn Einheiten einer Reihe eine Einheit auf die folgende überträgt, d. h. die etwaigen Zehner aus der ersten Reihe zur zweiten, und die etwaigen Zehner (eigentlich Hunderter) aus der zweiten Reihe zur dritten zählt &c. Sind sehr viele Zahlen zu addiren, so kann man auch beliebige Einschnitte machen, die Summe erst theilweise suchen und dann wieder diese Summe addiren.

Es ist offenbar gleichgültig, in welcher Folge man die Zahlen unter einander ordnet und addirt; man erhält doch immer dieselbe Menge Einheiten als deren Summe. Beispiele:

							789959
							98879
					7	0	357768
			4	2	7	5	5599
				5	9	9	9075
Pöste					9	0	800
		7	8	4	0	7	997997
					3	4	60088
		4	2	5	4	9	7673099
Summe	1	2	6	0	2	4	10083264

2. Subtraction.

8.

Die Subtraction lehrt den **Unterschied** zweier Zahlen finden, oder eine Zahl von einer andern abziehen. Die Zahl, von welcher eine andere abgezogen wird, heisst **Minuendus** (die zu verkleinernde Zahl) und die, welche davon abgezogen (subtrahirt) wird, **Subtrahendus** (die abzuziehende Zahl, das, was vom Minuendus noch übrig bleibt, heisst **Rest** oder **Differenz**. Die Regel der Subtraction ergiebt sich ganz von selbst aus der Theorie des Zahlensystems. Man wird nämlich den Subtrahendus so unter den Minuendus setzen, dass **gleichnamige Einheiten** unter einander stehen, und dann bei den Einern anfangend, jede Ziffer des Subtrahendus von der gleichnamigen darüber stehenden im Minuendus subtrahiren,* und im Fall diese Ziffer kleiner ist, die nächste links stehende Ziffer um eine Einheit verkleinern und dafür jener zehn Einheiten wieder zurechnen, alsdann kann die untenstehende Ziffer im Subtrahendus von der darüber stehenden, um zehn vergrösserten subtrahirt werden (No. 2).

Ist die Ziffer, von welcher subtrahirt werden soll, zu klein und die zunächst links folgende eine Null (No. 3), so muss man weiter gehen und aus der ersten geltenden Ziffer eine Einheit wegnehmen. Für diese Einheit kann man an die Stelle der folgenden Null zehn setzen. Aus diesen zehn Einheiten wieder eine Einheit genommen, kommt an die Stelle der Null neun zu stehen &c., so dass also die erste geltende Ziffer um eine Einheit kleiner, aus jeder folgenden Null eine Neun und die zu kleine Ziffer, von welcher subtrahirt werden soll, um zehn Einheiten grösser wird. Dieses Verfahren wird noch anschaulicher, wenn man nach geschehener Subtraction den Rest wieder zum Subtrahendus addirt, wo dann, wenn in beiden Operationen kein Fehler vorgefallen, der Minuendus wieder erscheinen muss.

			. 10 . 10		. 10 . 10
(1)	Minuendus 789	(2)	3|4|5|3	(3)	30002503
	Subtrahendus 246		1|9|1|4		27494097
	Rest 543		1|5|3|9		2508406

	. . . . .
(4)	70040321
	29067332
	40972989

* Das Wort Ziffer wird oft, der Kürze wegen, gleichbedeutend mit dem Worte Zahl gebraucht. An sich ist aber eine Ziffer ebenso wenig eine Zahl, als die vier Zeichen: H, a, u, s eine wirkliche Wohnung sind.

3. Multiplication.

9.

Die **Multiplication** lehrt die Regeln, nach welchen man ein verlangtes Vielfache einer vorgegebenen Zahl leichter als durch gewöhnliche Addition finden kann. — Die Zahl, deren Vielfaches gesucht wird, heisst **Multiplicandus** (die zu vervielfachende Zahl), und die, welche angiebt, welches Vielfache des Multiplicandus verlangt wird, **Multiplicator** (Vervielfacher), das durch Multipliciren erhaltene Vielfache heisst **Product**. Beide, Multiplicator und Multiplicandus, heissen die **Factoren** des Products. Soll z. E. das 5fache der Zahl 8 angegeben werden, so wäre 8 der Multiplicandus, 5 der Multiplicator, 40 das Product und 5 und 8 die beiden Factoren dieses Products.

Der Erste, der die schöne und wichtige Erfindung der Multiplication machte, ist vielleicht durch folgende Betrachtungen darauf gekommen.

Es sei z. B. das 4253fache der Zahl 8067 zu finden. Man **denke** sich nun den Multiplicandus, wie bei A angedeutet, so oft unter einander gesetzt, als der Multiplicator die Einheit enthält. Den Multiplicator denke man sich in seine einzelnen Rang-Einheiten zerlegt, wie bei B, und dann die ganze Reihe der unter einander stehenden gleichen Zahlen in kleinere Abschnitte getheilt, wovon der erste so viele Pöste enthält, als der Multiplicator Einer, dann so viele gleiche Abschnitte, von je zehn Pösten, als der Multiplicator Zehner enthält, ferner so viel gleiche Abschnitte von je hundert Pösten, als der Multiplicator Hunderte enthält u. s. f.

Wenn man nun die Summe der einzelnen Abschnitte sucht und dann wieder diese Summen addirt, so erhält man offenbar das verlangte Product.

Die Summe, welche 10, 100, 1000 gleiche Pöste enthalten, findet man nun aber ohne alle Rechnung, wenn man nur überlegt, dass nach der Theorie unsers Zahlensystems eine Zahl 10 mal nehmen, nichts Anderes heisst, als jede ihrer Rang-Einheiten in den nächst höheren Rang zu rücken, oder ihr bloss eine Null anzuhängen; eine Zahl 100 mal nehmen, so viel ist, als jede ihrer Rang-Einheiten um zwei Ränge höher zu bringen, was durch Anhängen von zwei Nullen geschieht.

B	A	
3	8067	
10	8067	
10	8067	
10	——	24201
10	8067	
10	8067	
100	8067	
100	8067	
1000	8067	
1000	8067	
1000	8067	
1000	8067	
4253	8067	
	8067	
	——	80670
	8067	
	u. s. w.	

Man findet also die Summe der ganzen Reihe A oder das 4253fache des Multiplicandus, indem man denselben erst so oft zu sich selbst addirt, als der Multiplicator Einer enthält, wie bei a, dann so oft, als der Multiplicator Zehner enthält, und der Summe eine Null anhängt, wie bei b &c. c, d, und endlich alle diese Summen a, b, c, d, wieder addirt, wie bei e.

a	b	c	d	e
	80670			
	80670		8067000	24201
8067	80670		8067000	403350
8067	80670	806700	8067000	1613400
8067	80670	806700	8067000	32268000
24201	403350	1613400	32268000	34308951

Da die höchtse Ziffer im Multiplicator nur 9 sein kann, so folgt, dass man nach diesem Verfahren den Multiplicandus nie öfter als 9 mal zu sich selbst zu addiren braucht. Macht man sich alzo zu diesem Gebrauch die kleine Multiplicationstabelle f, aus welcher man das Zweifache, Dreifache . . . bis Neunfache einer jeden einziffrigen Zahl unmittelbar entnehmen kann, so wird die Arbeit bedeutend erleichtert, noch mehr, wenn man diese kleine, unter dem Namen Einmaleins bekannte, nützliche Tabelle im Kopfe hat, indem man dann die einzelnen Summen a, b, c, d gleich unter einander stellen kann, wie bei g.

(f)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

g

Multiplicandus: 8067 } Factoren
Multiplicator: 4253 }

24201
40335
16134
32268

Product: 34308951

Man multiplicirt nämlich erst mit der letzten Ziffer des Multiplicators, dann mit der vorletzten, indem man das Product um eine Stelle gegen die Linke rückt &c., wie bei g.

10.

Haben beide Factoren, oder auch nur einer derselben, Nullen am Ende, so braucht man nur (wie aus der vorhergehenden Theorie leicht zu folgern ist) die bedeutlichen Ziffern mit einander zu

multipliciren, und dem Producte so viel Nullen anzuhängen, als beide Factoren zusammen (am Ende) haben (No. 1 und 2). Kommen mitten im Multiplicator Nullen vor, so kann man, um einem Irrthum vorzubeugen, das Zurückrücken der einzelnen Producte durch Puncte bemerken (No. 3). Uebrigens kann man die Factoren eines Products immer mit einander verwechseln, und, der leichtern Rechnung wegen, den kleinsten zum Multiplicator nehmen. (Siehe § 313.)

(1)	(2)	(3)
32	5302000	30794
4000	3400	200506
128000	21208	184764
	15906	153970·
	18026800000	61588··
		6174381764

4. Division.

11.

Die Division lehrt folgende beiden Fragen beantworten: 1) Es ist eine Zahl (z. E. 54) gegeben, man fragt: wie gross ein bestimmter Theil derselben, z. B der 6te, ist. 2) Es ist eine Zahl (54) gegeben, man fragt, wie oft eine andere Zahl (6) darin enthalten ist. Beide Fragen lassen sich in eine einzige zusammenziehen, denn da sowohl im ersten als im zweiten Fall die gesuchte Zahl so beschaffen sein muss, dass sie, mit der zweiten Zahl 6 multiplicirt, ein Product giebt, welches der ersten Zahl gleich ist, so kann man sowohl die erste als zweite Frage allgemein so ausdrücken: Es ist eine Zahl, Dividendus (die zu theilende Zahl), z. B. 34308951, als Product zweier Factoren, gegeben; der eine Factor, hier Divisor (Theiler) genannt, ist bekannt, z. B. 4253, man sucht den andern unbekannten Factor, hier Quotient (Theil) genannt.

Die Division ist also grade das Umgekehrte der Multiplication, denn die Multiplication bildet aus zwei Factoren ein Product, die Division soll aber umgekehrt ein Product in zwei Factoren, wovon der eine gegeben ist, zerlegen. Die Regeln hiezu findet man nach gehöriger Ueberlegung sehr leicht. Statt nämlich, wie es der erste Gedanke eingiebt, den Divisor wiederholt vom Dividendus zu subtrahiren, und für jede Subtraction eine Einheit in den Quotienten zu setzen, zeigt ein wenig Aufmerksamkeit, dass sich dieses Verfahren mit Hülfe der Multiplication sehr abkürzen lässt. Vergleicht man die Ziffern des Divisors mit eben so vielen des Dividendus, so sieht man leicht, indem man den Divisor mit 8 multiplicirt und diesem

Product im Gedanken drei Nullen anhängt, dass das 8000fache des Divisors noch kleiner, das 9000fache aber grösser ist, als der Dividendus. Der Quotient liegt also zwischen 8000 und 9000, und 8 muss mithin dessen erste Ziffer sein. Man kann also das 8000fache des Divisors auf einmal subtrahiren. Vergleicht man wieder die Ziffern des Divisors mit eben so vielen des Restes, so sieht man, dass das 60fache des Divisors kleiner, das 70fache aber grösser ist, als der Rest, und dass mithin 0 die zweite und 6 die dritte Ziffer im Quotienten sein muss &c.

Divisor	Dividendus	Quotient
4253	34308951	8000
	34024000	60
	284951	7
	255180	8067
	29771	
	29771	

kürzer:

4253	34308951	8067
	34024:::	
	28495:	
	25518:	
	29771	
	29771	

12.

Die eben erklärten vier Rechnungsarten, welche als ein verkürztes Zuzählungs- und Abzählungsverfahren betrachtet werden können, werden von Einigen mit Recht die Seele der ganzen Arithmetik genannt. Die grosse Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher man sie ausführt, ist offenbar eine Folge des einfachen Gesetzes im Zahlensystem, dass durchgehends die Einheit einer links stehenden Ziffer ein gleich Vielfaches einer Einheit der nächst rechts stehenden gilt, weshalb man auch bei allen vier Rechnungsarten an den Namen der Einheiten, mit welchen man rechnet, gar nicht zu denken braucht. Wäre statt dieses einfachen Gesetzes ein verwickelteres eingeführt worden, z. E. dass sechs Einheiten der ersten rechts stehenden Ziffer eine Einheit der zweiten, dann vier Einheiten der zweiten eine Einheit der dritten gelten solle &c., wie stände es dann um unsere schöne leichte Arithmetik?

Drittes Buch.

Zeichen, Kunstwörter, Eigenschaften der Zahlen, Theilbarkeit, Maasse &c.

13.

Jede Wissenschaft hat zur Benennung zusammengesetzter Begriffe ihre eigenen Kunstwörter, die gleich den Fürwörtern ganze Sätze vertreten und mithin zur Abkürzung des Vortrags dienen. Wer nicht alle Augenblicke auf Dunkelheiten stossen will, muss sich die Bedeutung dieser Kunstwörter wohl merken, denn im schriftlichen Vortrage werden sie nur einmal erklärt und dann als bekannt vorausgesetzt. — Um dem Anfänger dies einleuchtend und zugleich begreiflich zu machen, dass, ohne Kunstwörter zu gebrauchen, der Vortrag unerträglich weitläufig und dadurch undeutlich werden würde, nehmen wir als Beispiel nur den Satz:

„Der Rest zum Subtrahend addirt, giebt den Minuend wieder.“ Sollte nun dieser Satz ausgesprochen werden, ohne von den eben gebrauchten Kunstwörtern Rest, Subtrahend, Minuend &c. zu profitiren, so müsste man sehr weitschweifig sagen:

„Die Zahl, welche von einer andern abgenommen worden ist, giebt, zu der Zahl, welche übrig geblieben, hinzugezählt, diejenige Zahl wieder, von welcher man erstere abgezogen hat.“

Man kann also auch solche Kunstwörter, die, wie man sieht, nicht allein zur Abkürzung des Vortrags, sondern auch zur Deutlichkeit dienen, nicht als fremde Wörter betrachten. Die meisten Kunstwörter der Mathematik sind fast in allen Sprachen dieselben. Solche Kunstwörter müssen also, eben weil sie ganze Sätze oder mehrere Vorstellungen enthalten, bevor sie gebraucht werden dürfen, immer erst erklärt werden, und das selbst, wenn man auch in der Sprache reden wollte, aus welcher sie stammen; sie lassen sich auch schon deshalb nicht durch ein einziges Wort übersetzen, weil die Begriffe, welche man mit ihnen verbindet, beim jetzigen Zustande der Wissenschaft viel grössern Inhalt haben, als sie ursprünglich, in der Kindheit der Wissenschaft, hatten.

Die Mathematik würde den Anfängern von einigermaassen gereiftem Verstande nicht so schwer vorkommen, wenn sie von Haus aus die Begriffe klar aufzufassen suchten, und Zeichen und Kunstwörter nicht mit einander verwechselten.

14.

Um kurz anzudeuten, dass mehrere Grössen addirt werden sollen, schreibt man die Grössen in beliebiger Folge nach einander hin und setzt vor jede (die erste ausgenommen) das Plus- oder Additionszeichen (+), welches also abgekürzt, statt des Wortes plus (mehr) steht; z. B. 3+8+5 lies: 3 plus 8 plus 5.

Soll eine Grösse von einer andern subtrahirt werden, so setzt man, um dies in Zeichen anzugeben, vor die zu subtrahirende Grösse das Minus- oder Subtractionszeichen (—), z. B. 8—5 lies: 8 minus (weniger) 5.

Um anzudeuten, dass zwei oder auch mehrere Factoren mit einander multiplicirt werden sollen, schreibt man die Factoren in beliebiger Folge nach einander hin und setzt zwischen sie das Multiplicationszeichen (·), (das liegende Kreuz × ist wenig gebräuchlich, weil es leicht mit dem Additionszeichen +, oder mit dem Buchstaben X verwechselt werden kann). Soll z. B. 8 mit 5 multiplicirt werden, so schreibt man 8·5, oder 5·8, lies: 8 mal 5, oder 5 mal 8. Soll 4 mit 5, das daraus entstehende Product wieder mit 3, das dann entstehende Product wieder mit 2 multiplicirt werden, welches also 120 geben würde, so deutet man dies so an: 4·5·3·2, oder 5·2·3·4, oder 2·3·4·5 &c. Es ist nämlich gleichgültig, in welcher Ordnung man die Factoren mit einander multiplicirt. (§ 313.)

Um anzudeuten, dass eine Grösse durch eine andere dividirt werden soll, zieht man unter den Dividendus einen Strich und setzt darunter den Divisor, z. B. $\frac{8}{2}$, lies: 8 dividirt durch 2. Zuweilen, aber gewöhnlich nur bei Brüchen, wird die Division auch durch das Kolon (:) angedeutet, welches man vor den hinter dem Dividendus stehenden Divisor setzt, z. B. 8 : 2, lies 8 dividirt durch 2.

15.

Ein aus mehreren durch + und — mit einander verbundenen Theilen gebildeter Grössenausdruck heisst im Allgemeinen eine vieltheilige Grösse, die man, so lange ihre Theile nicht in Eins zusammengerechnet sind, zuweilen nach der Anzahl der Theile zu benennen pflegt, wobei man Multiplications- und Divisions-Ausdrücke nur für einzelne Theile ansieht. So wären z. E.

$$4\cdot 8;\ \frac{12}{3};\ \frac{4\cdot 6}{2}\ \text{eintheilige Grössen.}$$

$$7+2;\ \frac{64}{8}-2\cdot 3;\ \text{zweitheilige Grössen.}$$

$$\frac{16}{2}+\frac{18}{3}-\frac{4\cdot 9}{3};\ \text{eine dreitheilige Grösse.}$$

16.

Um anzudeuten, dass zwei Grössen-Ausdrücke am Betrage völlig gleich sind, setzt man zwischen beide das Gleichheitszeichen (=) und nennt dann eine solche durch dieses Zeichen angedeutete Gleichheit eine **Gleichung**. Was diesseits des Gleichheitszeichens steht, heisst die erste oder linke Seite, was jenseits steht, die zweite oder rechte Seite, und die einzelnen durch + und — verbundenen Theile die Glieder der Gleichung. So ist z. E.

$$8+5=13; \qquad 2\cdot3\cdot4\cdot5=120$$

$$8-5=3; \qquad \frac{64}{8}-2\cdot3=5-3$$

$$\frac{3\cdot8}{6}=4; \qquad \frac{4\cdot6}{2}+8=4\cdot6-\frac{8}{2}$$

17.

Die Ungleichheit zweier Grössen deutet man durch das Zeichen $<$ an, welches man so zwischen die beiden ungleichen Grössen stellt, dass die Spitze der kleinern Grösse zugewandt ist, z. B. $9>7$ oder $7<9$, lies: 9 ist grösser als 7, oder 7 ist kleiner als 9; eben so: $3+6>8$.

18.

Grundsatz. **Gleiches gleich behandelt, giebt Gleiches.** Wenn man z. B. auf beiden Seiten einer Gleichung gleiche Grössen addirt oder subtrahirt, oder auf beiden Seiten mit einerlei Grösse multiplicirt oder dividirt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. Es ist z. B. $2\cdot6=8+4$, und wenn man auf beiden Seiten 5 addirt, so ist nothwendig auch: $2\cdot6+5=8+4+5$.

19.

Um anzudeuten, dass eine vieltheilige Grösse mehrmals genommen, oder mit einer eintheiligen Grösse multiplicirt werden soll, schliesst man die vieltheilige Grösse in Klammern ein, und setzt vor oder hinter dieselbe den Multiplicator, und zwar ohne Multiplicationszeichen, welches durch die Klammern entbehrlich wird. Es ist dann einerlei, ob man die vieltheilige Grösse erst in eine eintheilige zusammenzieht und diesen Betrag multiplicirt, oder ob man erst jeden Theil derselben multiplicirt und die Producte addirt. Um die Richtigkeit einzusehen, braucht man sich nur die vieltheilige Grösse so oft als Post (unter einander) gesetzt zu denken, als der davor stehende Factor Einheiten enthält. Soll z. E.

die Grösse $3+5+1$ fünfmal genommen werden, so deutet man dies so an: $5(3+5+1)$ und es ist dann

$$5(3+5+1)=5\cdot3+5\cdot5+5\cdot1=15+25+5=45$$

Denn es ist:

$$5(3+5+1)=\begin{cases}3+5+1\\3+5+1\\3+5+1\\3+5+1\\3+5+1\end{cases}$$

$$5(3+5+1)=5\cdot3+5\cdot5+5\cdot1$$
$$5(3+5+1)=15+25+5\ *$$

20.

Soll eine vieltheilige Grösse durch eine eintheilige dividirt werden, so muss es nach § 19 einerlei sein, ob man den Betrag der vieltheiligen Grösse erst zusammenrechnet und dann in die Summe dividirt, oder ob man erst in jeden Theil dividirt und die Quotienten addirt. Soll z. E. von der vieltheiligen Grösse $15+25+5$ der 5te Theil genommen werden, so deutet man dies so an: $\frac{15+25+5}{5}$, und es ist dann:

$$\frac{15+25+5}{5}=\frac{15}{5}+\frac{25}{5}+\frac{5}{5}=3+5+1=9$$

21.

Wenn also mehrere Zahlen durch eine und dieselbe Zahl ohne Rest theilbar sind, so muss es auch die Summe sein. Es sind z. B. die Zahlen 15, 25, 5 durch 5 ohne Rest theilbar, und mithin auch ihre Summe 45.

22.

Ein aus mehreren Factoren entwickeltes Product ist offenbar durch jeden seiner Factoren, so wie auch durch Producte aus je zwei, je drei derselben &c., ohne Rest theilbar und der Quotient ist dem Producte der übrigen Factoren gleich. Es ist z. E. $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$, und die Zahl 120 ist nicht allein durch 2, 3, 4 und 5, sondern auch durch $2\cdot3=6$; $2\cdot4=8$; $3\cdot5=15$ &c.; $2\cdot3\cdot4=24$; $2\cdot4\cdot5=40$ &c. theilbar. Man hat z. B.:

$$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{2\cdot3\cdot4}=5;\qquad\frac{3\cdot2\cdot5\cdot4}{3\cdot5}=2\cdot4=8$$

* Der Anfänger muss sich ganz besonders die §§ 19, 20, 22 und 23 merken, welche für die Folge von grosser Wichtigkeit sind.

23.

Soll man zwei Zahlen, z. B. 18 und 52, mit einander multipliciren und das Product durch eine dritte Zahl, z. B. 6, dividiren, in Zeichen: $\frac{18 \cdot 52}{6}$, so braucht man nur, wenn der Divisor in einem der Factoren ohne Rest enthalten ist, in den einen Factor zu dividiren und mit dem erhaltenen Quotienten den andern Factor zu multipliciren. Es ist nämlich:

$$\frac{18 \cdot 52}{6} = \frac{18}{6} \cdot 52 = 3 \cdot 52 = 156$$

Um die Richtigkeit dieses Rechnungsvortheils einzusehen, denke man sich den Multiplicandus 52, achtzehnmal als Post hingesetzt, und dann von diesen 18 gleichen Pösten den 6ten Theil genommen, nämlich 3 Pöste. Beispiele:

$$\frac{24 \cdot 36}{12} = 2 \cdot 36 = 72$$

$$\frac{18 \cdot 49}{7} = 18 \cdot 7 = 126$$

Um solche oft stattfindende Rechnungsvortheile benutzen zu können, kommt es sehr zu Statten, wenn man es einer Zahl gleich ansehen kann, durch welche andere sie ohne Rest theilbar ist. Man merke sich daher folgende wenige, leicht zu behaltende Kennzeichen

24.

Eine Zahl ist allemal durch 2 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer es ist, wie 10; 24; 210; 506 &c.; durch $2 \cdot 2$ oder 4, wenn ihre beiden letzten Ziffern es sind, wie 100; 316; 5124; 500 &c.; durch $2 \cdot 2 \cdot 2$ oder 8, wenn ihre drei letzten Ziffern es sind, wie 5832; 1008; 2160 &c.; durch $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ oder 16, wenn ihre vier letzten Ziffern es sind u. s. f. (§ 314.)

Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer es ist, wie 10; 65; 75; 310 &c.; durch $5 \cdot 5$ oder 25, wenn die beiden letzten; durch $5 \cdot 5 \cdot 5$ oder 125, wenn die drei letzten Ziffern es sind u. s. f. (§ 314.)

Eine Zahl ist durch 3 und 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern es ist; z. B. 141 ist durch 3 theilbar, weil die Summe der Ziffern $1 + 4 + 1 = 6$ es ist, eben so: 99; 111; 1101; 6504 &c.; die Zahl 5121 ist durch 9 theilbar, weil die Summe der Ziffern $5 + 1 + 2 + 1 = 9$ es ist, eben so 99; 7074; 9297; 7992 &c. (§ 314.)

Die Regeln für die Theilbarkeit durch die übrigen Zahlen, wie 7, 13, 17 &c. sind viel zu weitläufig und nicht practisch brauchbar.

25.

Alle Zahlen, welche durch 2 ohne Rest theilbar sind, wie 2, 4, 184, 100 &c heissen **grade**, und die, welche durch 2 dividirt, 1 zum Rest lassen, wie 3, 5, 7, 101 &c. heissen **ungrade**.

Anmerkung. Obgleich 0 als Stellzeichen und 1 als Einheit, aus deren Wiederholung erst eine Zahl entsteht, keine Zahlen sind, so pflegt man doch oftmals, der Allgemeinheit wegen, beide zu den Zahlen zu rechnen, und zwar 0 zu den graden und 1 zu den ungraden.

26.

Eine Zahl, welche durch andere ohne Rest theilbar ist, sich mithin in Factoren auflösen lässt, heisst eine **zusammengesetzte Zahl**, und die, durch welche sie theilbar ist, heissen Factoren derselben. So ist z. B. 8 eine zusammengesetzte Zahl und 2 und 4 sind deren Factoren, eben so sind 9, 10, 12, 27 &c. zusammengesetzte Zahlen, denn: $9 = 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Diejenigen Zahlen aber, welche sich **nicht** durch andere ohne Rest theilen, also auch nicht in Factoren auflösen lassen, heissen **Primzahlen**. Solche sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 &c. — Jede Primzahl, die erste (2) ausgenommen, ist also immer eine ungrade Zahl; nicht aber umgekehrt.

Die Mathematiker haben mehrere merkwürdige Eigenschaften der Zahlen entdeckt, aber noch keine allgemeine Kennzeichen der Primzahlen.

27.

Wenn **mehrere** Zahlen **zugleich** durch eine andere ohne Rest theilbar sind, so heissen erstere **zusammengesetzte Zahlen gegen einander**, und letztere deren **gemeinschaftliches Maass** oder **gemeinschaftlicher Factor**. So sind z. B. 21, 28, 14, 7 und eben so 9, 27, 18 zusammengesetzte Zahlen gegen einander; erstere haben 7 und letztere 3 und auch 9 als gemeinschaftlichen Factor.

Zahlen aber, welche nicht zugleich durch eine andere, ohne Rest theilbar sind, heissen **Primzahlen gegen einander**. Solche sind z. E. 8, 9, 10 oder 8, 6, 10, 5.

28.

Um **alle**, sowohl **einfache** als **zusammengesetzte** Factoren zu finden, durch welche eine zusammengesetzte Zahl, z. B. 210, ohne Rest theilbar ist, dividire man sie erst durch eine Primzahl, den Quotienten wieder durch eine Primzahl und so fort, bis man auf die Einheit kommt, alsdann sind alle gleich neben dem Striche stehende Zahlen die verlangten einfachen Factoren. Multiplicirt man diese zu je zwei, je drei &c. mit einander (§ 22), so erhält man

auch die zusammengesetzten Factoren. Man multiplicirt nämlich mit dem ersten neben dem Striche stehenden einfachen Factor alle folgenden, dann mit dem zweiten alle folgenden einfachen und die daneben stehenden zusammengesetzten u. s. w. bis zu Ende. Kommen unter den einfachen Factoren mehrere gleiche vor, so braucht man bloss den letzten gleichen Factor zu multipliciren (No. 2). (S. § 316.)

No. 1.

210	
105	2,
35	3, 6,
7	5, 10, 15, 30,
1	7, 14, 21, 42, 35, 70, 105.

$210 = 2 \cdot 105$
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 35$
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

No. 2.

360	
180	2,
90	2,
45	2, 4, 8,
15	3,
5	3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
1	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180.

Es ist also $210 = 2 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ und die Zahl 210 ist mithin (§ 22) durch 2, 3, 5, 7, 6, 10, 15, 30, 14, 21 &c. ohne Rest theilbar. Eben so ist die Zahl $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ durch 2, 3, 5, 4, 8, 6, 12 &c. theilbar.

Aufgaben: Welches sind die einfachen und zusammengesetzten Factoren a) von 4158; b) von 1836; c) von 1155.

Antwort: a) Es ist 4158 = 3.3.3.2.7.11 mithin 3, 2, 7, 11, 9, 27, 6, 18, 54, 21, 63, 189, 14, 42, 126, 378, 33, 99, 297, 22, 66, 198, 594, 77, 231, 693, 2079, 154, 462, 1386.

b) Es ist 1836 = 2.2.3.3.3.17; daher 2, 3, 17; 4, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 34, 68, 51, 102, 204, 153, 306, 612, 459, 918.

c) Es ist 1155 = 5.3.7.11, daher 5, 3, 7, 11; 15, 35, 55, 21, 33, 77 &c.

29.

Die gemeinschaftlichen Factoren mehrerer Zahlen, z. B. von 68, 88, findet man sehr leicht, wenn man diese Zahlen nach § 28 erst in Factoren zerlegt; so ist z. B. $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$; und die Zahlen 68, 88 sind also durch 2 und $2 \cdot 2$ oder 4, als deren gemeinschaftliche Factoren, zu gleicher Zeit theilbar. Will man aber von zwei Zahlen nur einen und zwar den grössten gemeinschaftlichen Factor haben, so findet man diesen gewöhnlich kürzer auf folgende Weise: Man dividire (ohne auf die Quotienten zu achten) mit der kleinsten Zahl in die grösste, mit dem etwa gebliebenen

Rest in den vorhergehenden Divisor, mit dem jetzt bleibenden Rest in den nächst vorhergehenden Divisor u. s. f. mit dem letzten Rest in den vorletzten, wie No. 1 oder No. 2 es zeigt. Diejenige Zahl, durch welche die Division zuletzt aufgeht, ist der grösste gemeinschaftliche Factor der beiden Zahlen. Hiernach findet man, dass 4 der grösste gemeinschaftliche Factor von 68 und 88 ist, No. 1; ferner, dass 17 der grösste gemeinschaftliche Factor von 595 und 306 ist, nach No. 2. (§ 315.)

(1)

	1	3	2	2
88 :	68 :	20 :	8 :	4
68 :	60 :	16 :	8	

(2)

	1	1	17
595	306	289	17
306	289	17	
		119	
		119	

Aufgaben: Welches ist der grösste gemeinschaftliche Factor von 235 und 564; von 1240 und 372; von 65 und 112.

Antwort: Für die beiden ersten Zahlen ist es 47, für die beiden folgenden 124; die beiden Zahlen 65 und 112 haben keinen gemeinschaftlichen Factor und sind also Primzahlen gegen einander.

30.

Beim Addiren und Subtrahiren der Brüche wird in der Folge häufig die Aufgabe vorkommen, die kleinste Zahl zu finden, welche durch mehrere gegebene Zahlen ohne Rest theilbar ist. Diese Zahl findet man folgendermaassen sehr leicht: erstlich kann man diejenigen der gegebenen Zahlen, welche schon in andern enthalten sind, auslassen; haben alsdann von den übrigen noch zwei oder mehrere einen Factor gemeinschaftlich, so kann man sie durch diesen gemeinschaftlichen Factor dividiren, und statt dieser Zahlen den gemeinschaftlichen Factor und die erhaltenen Quotienten setzen. Werden dann diese mit einander und mit den etwa noch übrigen Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, multiplicirt, so ist das Product die kleinstmöglichste Zahl, welche durch alle gegebene ohne Rest theilbar ist. Sucht man z. E. eine Zahl, welche durch 2, 5, 4, 18, 6, 9, 10, 24, 35, 21 theilbar ist, so würde nach § 22 das Product aus diesen Zahlen die verlangte Eigenschaft haben; um aber die kleinstmöglichste Zahl zu erhalten, kann man offenbar die Zahlen 2, 5, 4, 6 und 9, als schon in den übrigen 18, 10, 24, 35 enthalten, auslassen, denn weil das Product aus den übrigen Zahlen 18, 10, 24, 35, 21 durch $18 = 2 \cdot 9$, durch $10 = 2 \cdot 5$; durch $24 = 4 \cdot 6$ &c. theilbar ist, so ist es offenbar auch durch die ausgestrichenen Zahlen 2, 5, 4, 6 &c. theilbar. Von den übrig gebliebenen Zahlen bei (a) haben 18 und 24 den Factor 6 gemeinschaftlich; dividirt man durch diesen herausgesetzten Factor, so erhält

man die Reihe Zahlen bei b, wo wieder die Zahl 3, als in 21 enthalten, weggelassen wird; ausserdem haben 10 und 35 noch den Factor 5 gemeinschaftlich; diesen ebenfalls herausgesetzt, kommt die Zahlenreihe bei c, wo man wieder 2 als in 4, und 7 als in 21 enthalten, auslässt. Die übrigen, 4, 21, welche Primzahlen gegen einander sind, so wie die herausgesetzten gemeinschaftlichen Factoren, 6, 5, muss man nun mit einander multipliciren. Dass durch dieses Verfahren das gefundene Product 6·5·4·21 = 2520 nothwendig die Factoren 6·3; 3·3; 2·5; 5·7 behalten, folglich auch durch 18, 9, 10, 35 &c. theilbar sein muss, ist leicht einzusehen (§ 22). Es ist mithin: 6·5·4·21 = 2520, als die gesuchte kleinste, durch 2, 5, 4, 18 ... theilbare Zahl.

2, 5, 4, 18, 6, 9, 10, 24, 35, 21
18, 10, 24, 35, 21 (a)
6) 3, 10, 4, 35, 21 (b)
5) 2, 4, 7, 21 (c)
6·5·4·21 = 2520

Ebenso findet man 5040, als die kleinste, durch 6, 9, 5, 7, 21, 56, 8, 12, 10, 16 theilbare Zahl.

(No. 2.) 6, 9, 5, 7, 21, 56, 8, 12, 10, 16
9, 21, 56, 12, 10, 16
3) 3, 7, 56, 4, 10, 16
8) 3, 7, 10, 2
3·8·3·7·10 = 5040

Aufgaben: Welches sind die kleinsten, durch 2, 11, 9, 21, 8, 18, 7, 22; durch 2, 3, 4, 6; durch 5, 12, 20, 15; durch 124, 100 theilbare Zahlen?

Antwort: 5544; 12; 60; 3100.

Viertes Buch.

Von den gewöhnlichen Brüchen.

31.

Um von der Grösse einer Sache eine bestimmte Vorstellung zu erhalten, muss diese Grösse mit einer gleichartigen, welche als Einheit dient, verglichen und ausgemessen werden (Vorbegr. I). Nun kann es sich aber häufig treffen, dass die Einheit in der auszumessenden Grösse nicht genaue Male enthalten ist, oder dass, nachdem sie einigemal darin abgesetzt worden, noch ein Stück zu messen übrig bleibt, welches kleiner ist, als die Einheit. In diesem Fall bleibt dann kein anderes Mittel, als das übrig gebliebene Stück mit einer andern und zwar kleinern Einheit auszumessen. Diese zweite Einheit wird man aber nicht willkürlich annehmen, sondern der einfachern Vorstellung wegen, von der erstern ableiten. Hat man nämlich eine deutliche Vorstellung von der Grösse der zuerst angelegten Einheit, so hat man zugleich auch eine deutliche Vorstellung von einem jeden bestimmten Theil derselben. Lässt sich nun irgend ein bestimmter Theil der Einheit (z. B. der 3te, 8te, 100ste &c.) angeben, welcher genaue Male in dem überschüssigen Theil der auszumessenden Grösse enthalten ist, so kann man diesen als die zweite Einheit nehmen. Weiss man dann, wie oft die grössere Einheit in der Grösse und eben so, wie oft die kleinere Einheit in dem überschüssigen Theil enthalten ist, so geben die Vorstellungen dieser beiden verschiedenen Einheiten und der daraus gebildeten Zahlen eine deutliche Vorstellung von der fraglichen Grösse.

Von den beiden verschiedenen Einheiten kann man die erste schicklicherweise die ganze Einheit und die andere, als ein von dieser ganzen Einheit abgebrochener Theil, die Bruch-Einheit, und sonach die aus der ersten Einheit gebildete Zahl die ganze Zahl, und die aus der Bruch-Einheit gebildete Zahl die Bruch-Zahl oder Bruch, und beiderlei Zahlen zusammen eine gemischte Zahl nennen. (Ein Bruch ist also in so fern eine ganze Zahl, als er, wie diese, eine bestimmte Menge von Einheiten enthält, denn nur auf die Einheit bezieht sich das Wort Bruch.)

32.

Um diese verschiedenen Zahlen kurz und deutlich mit Ziffern bezeichnen zu können, hat man Folgendes festgesetzt: Die ganze Einheit und die ganze Zahl wird wie gewöhnlich bezeichnet, die

Bruch-Einheit aber dadurch, dass man unter das Zeichen für die ganze Einheit einen wagerechten Strich zieht ($\frac{1}{\ }$), und unter diesen Strich diejenige Zahl setzt, welche angiebt, der wievielste Theil der grössern Einheit zur Bruch-Einheit genommen ist, der Bruch selbst dadurch, dass man die Zahl, welche die Wiederholung der Bruch-Einheit angiebt oder zählt, über den Strich, statt des Einheitszeichens, setzt. Wäre z. E. der 8te Theil eines Fusses in einer damit ausgemessenen Länge 5mal enthalten, so würde $\frac{1}{8}$ Fuss die Bruch-Einheit und $\frac{5}{8}$ Fuss die Bruchzahl darstellen.

Die Zahl, welche über dem Striche steht und die Anzahl der Bruch-Einheiten angiebt (zählt), heisst der Zähler, die unter dem Striche stehende Zahl, welcher man beim Aussprechen die Endung tel anhängt, heisst der Nenner des Bruchs. Beide Benennungen sind nicht unpassend. So ist z. E. im Bruche $\frac{5}{8}$ (lies: fünfachtel) 5 der Zähler, 8 der Nenner und $\frac{1}{8}$ die Einheit; in $\frac{15}{34}$ ist $\frac{1}{34}$ die Einheit, 34 der Nenner und 15 der Zähler.

Eine gemischte Zahl wird dargestellt, indem man die Bruchzahl unmittelbar neben die ganze setzt, z. B. $7\frac{5}{8}$ (lies: sieben fünfachtel) d. h. 7 ganze Einheiten und 5 mal den 8ten Theil der ganzen Einheit.

33.

Die Bezeichnung eines Bruchs (welche ursprünglich anders war) stimmt mit der Andeutung einer Division überein. Auch kann man immer eine angedeutete Division als einen Bruch und umgekehrt einen Bruch als eine angedeutete Division betrachten. Es ist z. B. gleichgültig, ob man sagt: $\frac{3}{4}$ ℔ heisse so viel, als: dreimal den vierten Theil von einem Pfunde oder einmal den vierten Theil von drei Pfund. Dies wird deutlicher, wenn man die benannte Einheit, 1 Pfund, in kleinere auflöst; so ist z. B. 1 ℔ = 32 Loth, mithin 3 ℔ = 3·32 Loth = 96 Loth. Ob man nun den 4ten Theil von 32 Loth 3mal, oder den 4ten Theil von 96 Loth 1mal nimmt, das ist gleichgültig, $3 \cdot \frac{32}{4} = \frac{3.32}{4} = 24$. (§ 23.) Ebenso ist es einerlei, ob man sagt, $\frac{8}{4}$ heisse: 8 dividirt durch 4, oder acht Viertel &c.; denn jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind, wie $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{100}{100}$ &c., ist offenbar der Einheit gleich und daher sind auch 8 Viertel so viel als 2mal $\frac{4}{4}$, d. i. zwei Ganze.

34.

Man kann daher auch jede ganze Zahl in Bruchsform mit beliebigem Nenner darstellen, wenn man die ganze Zahl erst mit dem Nenner multiplicirt und dem Producte den Nenner wieder unterschreibt. Soll z. E. die Zahl 7 als Bruch mit dem Nenner 4 oder 5 dargestellt werden, so ist $7 = \frac{4.7}{4} = \frac{28}{4}$; $7 = \frac{7.5}{5} = \frac{35}{5}$ &c. Ebenso kann man jede gemischte Zahl als eine einzige Bruchzahl darstellen, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruchs

multiplicirt, zum Producte den Zähler addirt, und der Summe den Nenner wieder unterschreibt. Dies nennt man: eine gemischte Zahl **einrichten**. So ist z. B. $7\frac{5}{8} = \frac{8 \cdot 7 + 5}{8} = \frac{61}{8}$; $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $200\frac{11}{12} = \frac{2411}{12}$ &c. Uebrigens werden alle Brüche, deren Zähler grösser ist, als der Nenner, wie $\frac{61}{8}$, $\frac{8}{3}$ &c., **unächte**, und die, deren Zähler kleiner ist, als der Nenner, wie $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ &c., **ächte** Brüche genannt.

35.

Die Fälle, wo man bei der Ausmessung und Vergleichung der Grössen auf Brüche kommt, sind folgende zwei:

1) wenn die auszumessende Grösse eine stetige (continuirliche) ist, und die Einheit nicht genau darin passt. Da dieser Fall aber alle Augenblicke vorkommt, so ist schon im Voraus dafür gesorgt, dass die meisten Einheiten, welche im gewöhnlichen Leben gebraucht werden, in die erforderlichen Unterabtheilungen getheilt sind. So hat man z. E. von der Gewichts-Einheit, **Pfund** genannt, auch zugleich den 2ten, 4ten, 8ten, 16ten, 32sten Theil &c.; von der Längen-Einheit **Fuss**, den 10ten, 12ten Theil &c.; von der Einheit **Elle**, den 2ten, 4ten, 8ten Theil &c. Einige dieser kleineren Bruch-Einheiten haben besondere Namen erhalten. So heisst z. B. $\frac{1}{32}$ ℔, d. i. der 32ste Theil von einem Pfunde, **Loth**. Der 12te Theil von einem Fusse, Duodecimalzoll; der 10te Theil, Decimalzoll; der 30ste Theil von einem preuss. Thaler, Silbergroschen &c. Andere ebenfalls vorhandene Einheiten, wie $\frac{1}{2}$ ℔, $\frac{1}{4}$ ℔, $\frac{1}{8}$ ℔; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ Elle; $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ Thaler &c. haben keinen besondern Namen. Umgekehrt können die kleineren Einheiten, ohne ihre besondere Namen nöthig zu haben, wieder als Bruchtheile einer grösseren Einheit dargestellt werden, wenn man nur weiss, wie viel kleinere Einheiten auf die grössere gehen. So kann man z. B. statt 1 Loth auch $\frac{1}{32}$ ℔ schreiben, statt 2 Loth, $\frac{2}{32}$ ℔ &c.; 1 Sgr. $= \frac{1}{30}$ Rthl.; 5 Sgr. $= \frac{5}{30}$ Rthl. &c.*

* Die eigenthümlichen Namen der kleineren Bruch-Einheiten sind völlig unnütz. Sowohl dem In- als Ausländer erschweren sie unnöthigerweise die Sprache und den Verkehr. Denn weil sich die Namen der kleineren Einheiten nicht aus dem der grössern ableiten lassen, so kann man aus dem Namen nicht einmal die Sache, viel weniger die Grösse errathen. Ausserdem wird man bemerken, dass in den Unterabtheilungen ursprünglich gar kein ordentliches System, sondern die roheste Willkür herrscht, welches zu langweiligen Rechnungen, vielen Maass- und Gewichts-Tabellen Anlass giebt. Der gemeine Mann kann sich kaum die verschiedenen Einheiten eines einzigen Orts gehörig merken. Der Name einer Einheit hätte auch für alle daraus gebildeten kleinern und grössern, mit Hinzufügung der Divisions- und Multiplications-Zahl vollkommen genügt, und der Wunsch, irgend ein einfaches für alle, nicht wie Tage, Monate, Jahre, von der Natur bestimmten, sondern für willkürliche Einheiten gleiches System, am liebsten das Decimalsystem eingeführt zu sehen, wird von dem vernünftigern Theil der bürgerlichen Gesellschaft so lange geäussert werden, bis er erfüllt ist. Welche Einfachheit im Decimalsystem! Weiss der Franzose was ein mètre ist, so kennt er auch sogleich einen decimètre, centimètre, millimètre, decamètre, hectomètre, kilomètre &c.

2) Bei der Vergleichung, Ausmessung und Theilung der unstetigen Grössen durch Division kommt man ebenfalls auf Brüche. Da man bei der Division allemal untersucht, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist, so kann oder muss man den Divisor immer als eine aus mehreren gleichen Theilen zusammengesetzte Einheit betrachten, und dann folgende drei Fälle unterscheiden: erstens, frägt man: wie viel mal eine Grösse grösser ist, als eine andere gleichartige, so ist der Quotient allemal eine unbenannte Zahl, der bloss von dem Verhältniss der beiden verglichenen Grössen, nicht aber von deren wirklichen Grösse oder Benennung abhängt. Frägt man z. E.: wie viel mal ist 20 grösser, als 4, 20 Rthl. grösser, als 4 Rthl., 80 kr grösser, als 16 kr &c., so ist die Antwort bei allen: 5mal. Ist der Divisor nicht genaue Male im Dividendus enthalten, so muss man den Rest des Dividendus mit untergelegtem Divisor den ganzen Einheiten des Quotienten als Bruch anhängen; frägt man z. B.: wie viel mal ist 23 grösser, als 4, so ist die Antwort: der Maassstab 4 ist im Dividendus 5 ganze Mal, und in dem Reste 3 ist der 4te Theil des Maassstabes (1) noch 3mal enthalten, nämlich $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$, mithin ist 23 grade $5\frac{3}{4}$ mal grösser, als 4; ebenso ist $\frac{99}{32} = 3\frac{3}{32}$; frägt man: wie oft ist 8 in 3 enthalten, so ist die Antwort: $\frac{3}{8}$ mal &c.; zweitens, wenn man niedere Einheiten auf höhere reducirt, alsdann wird der Einheit des unbenannten Quotienten die Benennung derjenigen höhern Einheit beigelegt, welche dem Divisor gleich gilt. Frägt man z. B.: wie viel Pfund sind 96 Loth, so ist, weil $\frac{96 \text{ Loth}}{32 \text{ Loth}} = 3$, 96 Loth = 3 ℔; ebenso findet man 99 Loth = $3\frac{3}{32}$ ℔ &c.; drittens, wenn von einer Grösse ein bestimmter Theil gesucht wird, in welchem Fall also der Quotient mit dem Dividendus gleichartig ist. So ist z. B. der 4te Theil von 23 ℔, $5\frac{3}{4}$ ℔; nämlich 5 ganze Pfund und von den übrig bleibenden 3 ℔ noch den 4ten Theil (§ 33). Ebenso ist $\frac{35}{6}$ Rthl. = $5\frac{5}{6}$ Rthl. &c.

Wer nun das Bisherige gut verstanden hat, und sich noch die folgenden fünf Sätze recht klar macht, der wird auch mit gebrochenen Zahlen eben so leicht, als mit ganzen Zahlen rechnen.

36.

Wenn man den *Zähler* eines Bruchs mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird der Bruch so viel mal grösser oder kleiner, als der Multiplicator oder Divisor die Einheit enthält.

Multiplicirt man z. B. den Zähler des Bruchs $\frac{6}{32}$ mit 3, so erhält man den Bruch $\frac{18}{32}$; ersterer enthält die Einheit $\frac{1}{32}$ 6 mal, letzterer aber dieselbe Einheit 18mal, und dass nun 18 Einheiten 3mal so viel ist, als 6 Einheiten derselben Art, ist zu begreifen. Dividirt man den Zähler des Bruchs $\frac{6}{32}$ durch 3, so wird er $\frac{2}{32}$ und dieser Bruch ist offenbar nur der 3te Theil des vorhergehenden. Ebenso ist $\frac{24}{63}$, 6mal so gross, als $\frac{4}{63}$, und $\frac{3}{63}$ der 8te Theil von $\frac{24}{63}$ &c.

37.

Wenn man aber den *Nenner* eines Bruchs mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird der Bruch, grade umgekehrt, so viel mal kleiner oder grösser, als der Multiplicator oder Divisor die Einheit enthält.

Dieser umgekehrte Satz des vorhergehenden, den Anfänger aber nicht so leicht zu begreifen pflegen, wird augenblicklich klar, wenn man sich die Bruch-Einheit nur als eine wirkliche Sache, etwa als eine Länge denkt. Multiplicirt man z. E. den Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ Fuss mit 4, so erhält man $\frac{3}{64}$ Fuss; denkt man sich nun die Länge des Fusses einmal in 16 und einmal in 64 gleiche Theile (mithin jeden der 16 gleiche Theile nochmals in vier gleiche Theile) getheilt, so ist der 16te Theil des Fusses, oder die Bruch-Einheit $\frac{1}{16}$ Fuss, offenbar 4mal so gross, als der 64ste Theil oder als die Einheit $\frac{1}{64}$ Fuss, und folglich ist auch die aus letzterer viermal kleineren Einheit ($\frac{1}{64}$) gebildete Zahl $\frac{3}{64}$ viermal kleiner, als die Zahl $\frac{3}{16}$; denn von zwei gleich hohen Zahlen ist die eine immer so viel mal grösser oder kleiner, als ihre Einheit grösser oder kleiner ist. Man denke sich z. B. die Einheiten 1 Sgr., 2 Sgr., 3 Sgr., so ist doch eine beliebige Anzahl 1-Sgr.-Stücke nur halb so gross, als eine gleiche Menge 2-Sgr.-Stücke, und nur ein Drittel so gross, als eine gleiche Menge 3-Sgr.-Stücke.

Dividirt man den Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ durch 4, so kommt $\frac{3}{4}$ und dieser Bruch $\frac{3}{4}$ ist viermal grösser, als $\frac{3}{16}$, weil die Einheit $\frac{1}{4}$ viermal grösser ist, als $\frac{1}{16}$. Ebenso ist $\frac{2}{3}$ zweimal grösser, als $\frac{2}{6}$; $\frac{2}{12}$ aber nur halb so gross, als $\frac{2}{6}$ &c.

38.

Der Werth eines Bruchs bleibt also völlig ungeändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Multiplicirt man z. E. Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{9}$ mit 3, so erhält er die Form: $\frac{18}{27}$; die Einheit $\frac{1}{27}$ ist hier 3mal kleiner, als $\frac{1}{9}$, dafür sind aber auch 3mal so viel Einheiten genommen, mithin ist $\frac{6}{9} = \frac{18}{27}$; dividirt man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{9}$ durch 3, so erhält er die Form $\frac{2}{3}$, hier ist die Einheit $\frac{1}{3}$ dreimal grösser, als $\frac{1}{9}$, dafür sind aber auch 3mal weniger Einheiten genommen, folglich ist auch $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{18}{27}$. Man kann also einen Bruch, ohne seinen Werth zu ändern, unter unzählig verschiedenen Formen darstellen.

39.

Jeden Bruch drückt man gewöhnlich gern durch die möglichst kleinsten Zahlen aus, indem man Zähler und Nenner entweder auf einmal durch ihr grösstes gemeinschaftliches Maass (§ 29), oder wiederholt durch solche Zahlen dividirt, durch welche sie theilbar sind, bis Zähler und Nenner Primzahlen gegen einander werden,

welches man einen Bruch abkürzen nennt. Der Bruch $\frac{24}{84}$ erhält, wie (1) oder (2) abgekürzt, die einfachere Form $\frac{2}{7}$.

$$(1)\quad \overset{12}{\frac{24}{84}}=\frac{2}{7}. \qquad (1)\quad \overset{2}{\frac{24}{84}}=\overset{2}{\frac{12}{42}}=\overset{3}{\frac{6}{21}}=\frac{2}{7}.$$

Aufgaben: Wie stehen folgende Brüche abgekürzt: $\frac{7}{14}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{31}{93}$, $\frac{111}{636}$, $\frac{194}{4559}$, $\frac{111}{9111}$, $\frac{233}{5531}$, $\frac{5300}{7897}$, $\frac{72}{84}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{8509}{9983}$, $\frac{7141}{7913}$, $\frac{59}{63}$, $\frac{21}{54}$, $\frac{8}{9}$.

Antwort: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{37}{212}$, $\frac{2}{47}$, $\frac{37}{3037}$, $\frac{233}{5531}$, $\frac{100}{149}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{127}{149}$, $\frac{37}{41}$, $\frac{59}{63}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{9}$.

40.

Soll umgekehrt ein Bruch, ohne Veränderung seines Werthes, auf einen neuen Nenner gebracht werden, der ein genaues Vielfache des alten ist, so braucht man offenbar nur den alten Zähler eben so viel mal grösser zu nehmen, als der neue Nenner grösser ist (§ 38). Man dividire nämlich mit dem alten Nenner in den vorgeschriebenen neuen Nenner und multiplicire mit dem Quotienten den alten Zähler, so ist das Product der neue Zähler. Soll z. B. der Bruch $\frac{4}{5}$ auf den neuen Nenner 45 gebracht werden, so ist $\frac{4}{5}=\frac{36}{45}$. Ebenso ist $\frac{2}{3}$ auf den Nenner 12 gebracht $=\frac{8}{12}$ &c.

Aufgaben: Folgende Brüche auf die angedeutete Form zu bringen: $\frac{5}{6}=\frac{\cdots}{144}$; $\frac{6}{17}=\frac{\cdot\cdot}{51}$; $\frac{5}{7}=\frac{\cdot\cdot}{84}$; $\frac{9}{13}=\frac{\cdots\cdot}{2613}$.

Antwort: Es ist: $\frac{5}{6}=\frac{120}{144}$; $\frac{6}{17}=\frac{18}{51}$; $\frac{5}{7}=\frac{60}{84}$; $\frac{9}{13}=\frac{1809}{2613}$.

41.

Um mehrere Brüche von verschiedenen Nennern der Grösse nach mit einander vergleichen zu können, müssen sie erst alle auf einerlei Bruch-Einheit oder Nenner gebracht werden. Diese Aufgabe ist nicht schwer, indem man nach § 30 leicht eine solche Zahl finden kann, in welcher alle Nenner ohne Rest enthalten sind. Sollen z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{8}$, alle auf einerlei Nenner gebracht werden, so findet man (§ 30) 72 als die kleinste, durch 3, 4, 6, 9, 12, 8 theilbare Zahl, mithin können (§ 40) alle Brüche auf diesen neuen Nenner 72 gebracht werden. Es ist nämlich:

$$\frac{2}{3}=\frac{48}{72};\ \frac{3}{4}=\frac{54}{72};\ \frac{5}{6}=\frac{60}{72};\ \frac{7}{9}=\frac{56}{72};\ \frac{11}{12}=\frac{66}{72};\ \frac{5}{8}=\frac{45}{72}.$$

42.

Addition. Man kann unmittelbar nur solche Zahlen addiren, welche aus gleich grossen Einheiten gebildet sind. Haben also die zu addirenden Bruchzahlen nicht einerlei Nenner, so müssen sie erst auf einerlei Nenner gebracht oder gleichnamig gemacht werden. Alsdann addire man nur ihre Zähler und bezeichne die Grösse der Einheit in der Summe durch die Unterschrift des allgemeinen Nenners. Sind gemischte Zahlen zu addiren, so addire man die ganzen und

die Bruchzahlen, jede besonders. So ist z. B. $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$; $\frac{2}{17}+\frac{7}{17}+\frac{8}{17}+\frac{1}{17}=\frac{18}{17}=1\frac{1}{17}$. Ebenso $3\frac{2}{17}+2\frac{6}{17}=5\frac{8}{17}$. Sind viele Brüche zu addiren, so kann man sie, der Bequemlichkeit wegen, erst unter einander ordnen, wie bei (1). Gewöhnlich verfährt man weniger umständlich, wie bei (2).

(1) $1080 = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot9$

$\frac{2}{3}$	720
$\frac{3}{4}$	810
$\frac{5}{6}$	900
$\frac{7}{8}$	945
$\frac{14}{27}$	560
$\frac{4}{9}$	480
$\frac{7}{15}$	504
$\frac{5}{108}$	50
$\frac{7}{54}$	140

$3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot27\cdot15\cdot108\cdot54$

3) $8\cdot5\cdot36$

4) $2\cdot5\cdot9$

$3\cdot4\cdot2\cdot5\cdot9 = 1080$

Summe: $\frac{5109}{1080} = 4\frac{789}{1080} = 4\frac{263}{360}$.

$$(2)\quad \frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\frac{11}{12} = \frac{63+60+77}{7\cdot12} = \frac{200}{84} = 2\frac{8}{21}.$$

Der allgemeine Nenner bei (1) ist 1080 (§ 30). Der erste Bruch $\frac{2}{3}$ auf diesen Nenner gebracht. ist $=\frac{720}{1080}$; ebenso ist $\frac{3}{4}=\frac{810}{1080}$ &c. Man dividirt nämlich mit jedem alten Nenner in den allgemeinen Nenner 1080, und multiplicirt mit dem Quotienten die alten Zähler, so erhält man die nebenstehenden neuen Zähler. Die Quotienten erhält man oftmals leichter, wenn man die Factoren des allgemeinen Nenners beibehält; so sieht man z. B. gleich, dass 15 in 1080, 72 mal enthalten ist, weil $\frac{1080}{15} = \frac{2.3.4.5.9}{3.5} = 2.4.9 = 72$ &c.

Kopfrechnen, welches man mehr üben sollte, kommt bei der Bruchrechnung ungemein zu Statten. So berechnet man z. E. leicht im Kopfe, dass $\frac{3}{4}+\frac{8}{24}=\frac{26}{24}=1\frac{1}{12}$ ist, indem man Zähler (und Nenner) des ersten Bruchs (in Gedanken) mit 6 multiplicirt, wodurch die Brüche gleichnamig werden. Ebenso dass $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{41}{24}=1\frac{17}{24}$, indem man den Zähler des ersten Bruchs mit 4, des andern mit 3 multiplicirt; ferner: $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{19}{28}$ (mit 4 und 7 multiplicirt); $\frac{2}{9}+\frac{7}{8}=\frac{16+63}{8.9}=\frac{79}{72}=1\frac{7}{72}$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$ (die Zähler der beiden ersten Brüche mit 4 und 2 multiplicirt):

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{2}{3}+\frac{7}{9} = 2\frac{1}{8}+1\frac{4}{9} = 3\frac{41}{72}$$

(indem man die drei ersten und zwei letzten Brüche besonders addirt).

Aufgaben. Addire:

1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\frac{11}{12}+\frac{7}{8}+\frac{5}{21}+\frac{1}{3}$.
2) $12\frac{2}{9}+3\frac{1}{2}+4\frac{7}{15}+\frac{1}{4}+2\frac{8}{15}+\frac{2}{3}$.
3) $\frac{11}{19}+\frac{3}{8}+\frac{7}{4}+\frac{8}{19}+\frac{5}{4}+\frac{15}{12}+\frac{5}{8}+\frac{9}{12}$.
4) $\frac{15}{124}+\frac{3}{62}+\frac{6}{248}+\frac{5}{12}$.
5) $\frac{3}{7}+\frac{5}{9}+\frac{1}{14}+\frac{5}{18}+3\frac{2}{3}+\frac{4}{125}$.
6) $\frac{5}{16}+\frac{3}{5}+\frac{17}{24}+\frac{9}{11}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{2}{11}$.
7) $\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{3}{100}+\frac{1}{5}$.

Antwort: Man findet $3\frac{139}{168}$, $23\frac{23}{36}$, 7, $\frac{221}{372}$, $5\frac{4}{125}$, $4\frac{29}{240}$, $\frac{761}{1000}$.

43.

Subtraction. Hier gilt dasselbe wie bei der Addition. Sind nämlich die Brüche nicht gleichnamig, so müssen sie erst gleichnamig gemacht werden. Alsdann braucht man nur den Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus zu subtrahiren, und dem Rest den gemeinschaftlichen Nenner unterzuschreiben. So ist z. B.

$$\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{8}=\tfrac{2}{8}=\tfrac{1}{4}; \qquad \tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{3}=\tfrac{9}{12}-\tfrac{8}{12}=\tfrac{1}{12}.$$

Ist ein Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahiren, so muss man erst eine Einheit vom Minuendus nehmen, und diese in einen Bruch von demselben Nenner, welchen der Subtrahend hat, auflösen. So ist z. B.:

$$5-\tfrac{2}{7}=4\tfrac{7}{7}-\tfrac{2}{7}=4\tfrac{5}{7}.$$
$$16-\tfrac{12}{139}=15\tfrac{139}{139}-\tfrac{12}{139}=15\tfrac{127}{139}.$$

Sind gemischte Zahlen von einander zu subtrahiren, so mache man die Brüche erst gleichnamig und subtrahire die Brüche und die Ganzen, jede besonders. Ist der Bruch im Subtrahend grösser, als der im Minuend, so muss man eine ganze Einheit des Minuends in Bruchеinheiten auflösen, z. B.:

$$5\tfrac{7}{8}-1\tfrac{2}{3}=5\tfrac{21}{24}-1\tfrac{16}{24}=4\tfrac{5}{24}.$$
$$14\tfrac{2}{3}-2\tfrac{7}{8}=14\left.\tfrac{24}{16}{24}\right\}-2\tfrac{21}{24}=11\tfrac{19}{24}.$$

Es ist nämlich, im letztern Beispiel, $\tfrac{2}{3}=\tfrac{16}{24}$, und $14=13\tfrac{24}{24}$, folglich $14\tfrac{2}{3}=13\tfrac{40}{24}$. Statt aber die beiden Zähler 24 und 16 erst zu addiren und von ihrer Summe (40) den Zähler 21 zu subtrahiren, ist es offenbar bequemer, ihn von 24 zu subtrahiren und den Rest zu 16 zu addiren.

Aufgaben: $\tfrac{7}{9}-\tfrac{4}{9}$; $\tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{5}$; $\tfrac{3}{4}-\tfrac{5}{8}$; $\tfrac{5}{9}-\tfrac{1}{2}$; $3-\tfrac{2}{3}$; $5\tfrac{5}{12}-2\tfrac{11}{12}$; $22\tfrac{5}{7}-4\tfrac{3}{4}$; $2\tfrac{12}{41}-1\tfrac{2}{3}$; $\tfrac{5}{6}-\tfrac{5}{8}$; $\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}$; $\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{9}$; $\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}$; $4\tfrac{8}{15}-2\tfrac{5}{9}$.

Antwort: $\tfrac{1}{3}$, $\tfrac{7}{20}$, $\tfrac{1}{8}$, $\tfrac{1}{18}$, $2\tfrac{1}{3}$, $2\tfrac{1}{2}$, $17\tfrac{27}{28}$, $\tfrac{77}{123}$, $\tfrac{5}{24}$, $\tfrac{1}{56}$, $\tfrac{1}{72}$, $\tfrac{1}{90}$, $1\tfrac{44}{45}$.

44.

Multiplication. Die leicht zu behaltende und leicht auszuführende Regel für die Multiplication zweier Brüche heisst: multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Diese gleich näher zu erläuternde Regel begreift alle Fälle. Ist nämlich einer der Factoren eine ganze Zahl, so kann man darunter 1 als Nenner gesetzt denken; ist einer der beiden Factoren oder auch beide gemischte Zahlen, so kann man sie erst einrichten, z. B.

$$\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{7}{9}=\frac{1.7}{5.9}=\tfrac{7}{45}$$
$$\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{7}{9}=\frac{4.7}{5.9}=\tfrac{28}{45}$$

$$4 \cdot \frac{7}{9} = \frac{4}{1} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$
$$2\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} = \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{9} = \frac{77}{36} = 2\frac{5}{36}$$
$$2\frac{3}{4} \cdot 2\frac{7}{9} = \frac{11}{4} \cdot \frac{25}{9} = \frac{275}{36} = 7\frac{23}{36}.$$

Erläuterung. Die Multiplication verlangt eine Grösse (den Multiplicandus) so oft zu nehmen, als eine andere Grösse (der Multiplicator) die Einheit enthält. Ist nun z. B. $\frac{1}{5}$ der Multiplicator und $\frac{7}{9}$ der Multiplicandus, so enthält der Multiplicator, $\frac{1}{5}$, nicht die ganze Einheit, sondern nur den 5ten Theil derselben einmal, mithin muss auch nicht die ganze Grösse $\frac{7}{9}$, sondern nur der 5te Theil derselben einmal genommen werden. Nach § 37 erhält man aber den 5ten Theil von $\frac{7}{9}$, wenn man den Nenner 9 fünfmal grösser macht; daher $\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{45}$. Anfänger pflegen immer mit Befremden zu äussern, dass dieser Fall, $\frac{1}{5}$mal $\frac{7}{9} = \frac{7}{45}$, zur Multiplication gerechnet wird, da doch die Grösse $\frac{7}{9}$ nicht vervielfacht, sondern, grade umgekehrt, dividirt ist. Diese scheinbare Verwechselung der Begriffe (Multiplication mit Division) wird aber gleich berichtigt und alle Schwierigkeit fällt weg, wenn man nur bedenkt, dass man von einer Grösse sowohl ein Bruchfaches als Vielfaches nehmen kann, dass die Redensarten: den 5ten Theil von einer Grösse nehmen, oder die Grösse $\frac{1}{5}$mal nehmen (mit $\frac{1}{5}$ multipliciren) einerlei sagen, und dass man eben deshalb den Begriff der Multiplication nicht in dem § 9 angegebenen engen Sinn, sondern in dem angedeuteten weitern Sinn nehmen muss, nämlich, multipliciren heisst: eine Grösse so oft nehmen, als eine andere die Einheit enthält. Diesem allgemeinern Begriffe der Multiplication zufolge muss also auch den Kunstwörtern: Multiplicandus, Multiplicator, Product, grössere Bedeutung beigelegt werden, und z. E. das Wort Product sowohl das Vielfache einer Grösse als das Bruchfache (Theile) derselben bedeuten. Multiplicandus heisst hiernach jede Grösse, wenn sie entweder selbst oder auch nur ein Theil von ihr vervielfältigt werden soll; Multiplicator diejenige, welche angiebt, wie oft der ganze Multiplicandus oder ein Theil von ihm genommen werden soll. Aus dieser Erklärung folgt mit Hülfe der §§ 37 und 36 sogleich die oben aufgestellte Multiplicationsregel.

Ist z. B. $\frac{4}{5}$ der Multiplicator und $\frac{7}{9}$ der Multiplicandus, so enthält der Multiplicator den 5ten Theil der Einheit 4mal, mithin muss auch der 5te Theil (ein Fünftel) vom Multiplicandus 4mal genommen werden. Der 5te Theil von $\frac{7}{9}$ ist (nach § 37) $= \frac{7}{45}$. Nimmt man diesen Theil 4mal (indem man nach § 36 den Zähler 7 mit 4 multiplicirt), so erhält man $\frac{28}{45}$, daher $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$. Die Aufgabe, eine Grösse $\frac{4}{5}$mal nehmen, enthält also eine Division und Multiplication zugleich.

45.

Sind mehrere Brüche mit einander zu multipliciren, so muss man alle Zähler und eben so alle Nenner mit einander multipliciren.

Soll z. B. $\frac{8}{9}$ mit $\frac{4}{7}$, das daraus entstehende Product mit $\frac{2}{5}$, das dann entstehende Product wieder mit $\frac{1}{3}$ multiplicirt werden, so hat man:

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8.4.2.1}{9.7.5.3}=\frac{64}{945}$$

Ist der Multiplicator ein ächter Bruch, so ist das Product natürlich immer kleiner, als der Multiplicandus. Sind also alle Factoren ächte Brüche, so ist das Product immer kleiner, als jeder einzelne Factor. Es ist z. B. $\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{24}{105}$ und $\frac{24}{105}<\frac{1}{3}$, $\frac{24}{105}<\frac{4}{5}$ &c.

46.

Haben Zähler und Nenner der mit einander zu multiplicirenden Brüche Factoren gemeinschaftlich, so kann man diese gegen einander aufheben, indem es einerlei ist, ob man dies vor oder nach vollzogener Multiplication thut (§§ 22, 39). Anfänger pflegen diesen häufig Statt findenden Rechnungsvortheil selten zu benutzen. So ist z. B. $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3}{8}$ (indem man 7 im Nenner des ersten Bruchs gegen 7 im Zähler des zweiten hebt); $\frac{12}{17}\cdot\frac{17}{32}=\frac{3}{8}$; $\frac{22}{75}\cdot\frac{5}{11}=\frac{2}{15}$; $6\cdot\frac{2}{3}=2\cdot2=4$; $\frac{3}{5}\cdot25=3\cdot5=15$; $16\cdot\frac{5}{32}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$. Sollen die Grössen $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{3}$ mit einander multiplicirt werden, so hat man:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2\cdot11}{4.3}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}.$$

Ist der eine Factor eine gemischte, der andere eine ganze Zahl, so ist es bequemer, mit letzterm die Ganzen und Brüche des erstern besonders zu multipliciren, und beide Producte zu addiren, und also die gemischte Zahl nicht erst einzurichten. Man hat z. B.

$$6\cdot5\frac{2}{21}=30+\frac{12}{21}=30\frac{4}{7};\qquad 12\cdot13\frac{4}{5}=156+\frac{48}{5}=165\frac{3}{5}.$$

Dieser Rechnungsvortheil findet auch dann noch Statt, wenn der eine Factor eine gemischte Zahl, der andere ein blosser Bruch ist.

Sind beide Factoren gemischte Zahlen, so könnte man mit den Ganzen und Brüchen des einen die Ganzen und Brüche des andern multipliciren und dann alle vier Producte addiren. Dieses Verfahren kann aber nur dann zweckmässig sein, wenn dabei nicht mehr als zwei Brüche entstehen, oder wenn die ganzen Zahlen sehr gross sind. Im Allgemeinen erhält man aber das Product leichter, wenn man beide Factoren erst einrichtet. Man hat z. B.

$$25\frac{5}{6}\cdot124\frac{3}{4}=25\cdot124+25\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\cdot124+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}$$
$$=3100+18\frac{3}{4}+103\frac{1}{3}+\frac{5}{8}$$
$$=3221+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{1}{3}=3222\frac{17}{24}$$
$$3\frac{3}{4}\cdot6\frac{4}{5}=\frac{15}{4}\cdot\frac{34}{5}=\frac{3.17}{2}=25\frac{1}{2}$$
$$25\frac{5}{6}\cdot124\frac{4}{5}=\frac{155}{6}\cdot\frac{624}{5}=31\cdot104=3224.$$

Zur Multiplication der Brüche gehört auch die Aufgabe: Bruchtheile von einer benannten höhern Einheit durch niedere auszudrücken,

indem man den Bruch mit der Anzahl niedern Einheiten, welche der höhern gleichgelten, multiplicirt. Da z. B. 32 Loth $=$ 1 Pfund, so ist $\frac{3}{4}$ Pfund $= \frac{3}{4} \cdot 32$ Loth $= 3 \cdot 8$ Loth $=$ 24 Loth. Eben so ist: $\frac{3}{5}$ Pfund $= \frac{3}{5} \cdot 32 = 19\frac{1}{5}$ Loth, oder wenn man $\frac{1}{5}$ Loth wieder in Quentchen auflöst: $\frac{3}{5}$ Pfd. $=$ 19 Lth. $\frac{4}{5}$ Qtch.; $\frac{3}{4}$ *Rℓ.* $= \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ gGr. $\frac{3}{7}$ *Rℓ.* $= \frac{3}{7} \cdot 24 = 10\frac{2}{7}$ gGr. $=$ 10 gGr. $3\frac{3}{7}$ ₰; $\frac{3}{4}$ ℳ $= \frac{3}{4} \cdot 16$ *β* $=$ 12 *β*.

Aufgaben: Multiplicire mit Benutzung der Vortheile, welche die gemeinschaftlichen Factoren gewähren: $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$; $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$; $2 \cdot \frac{1}{2}$; $1 \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{3}{14} \cdot \frac{28}{41}$; $\frac{22}{65} \cdot \frac{5}{11}$; $\frac{5}{31} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{15}{11} \cdot \frac{121}{365}$; $125 \cdot 7\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5} \cdot 11\frac{4}{11}$; $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4}$; $2\frac{5}{6} \cdot 33\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot 6$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9}$; $2\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2\frac{2}{3}$; $23\frac{5}{6} \cdot 22\frac{5}{13}$; $33\frac{2}{3} \cdot 100$; $27\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{100}$; $\frac{123}{252} \cdot \frac{28}{717}$.

Antwort. Die Producte sind: $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{6}{41}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{31}$, $\frac{33}{73}$, 975, $6\frac{9}{11}$, $1\frac{1}{4}$, $94\frac{11}{12}$, 1, $\frac{40}{189}$, $4\frac{76}{135}$, $533\frac{1}{2}$, $3366\frac{2}{3}$, $1\frac{47}{50}$, $\frac{41}{2151}$.

47.

Division. Bei Brüchen pflegt man die Division gewöhnlich durch das Colon (:) anzudeuten, indem man den Divisor immer hinter den Dividendus setzt. Soll z. B. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden, so schreibt man statt $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$ lieber so: $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$. Die Division der Brüche lässt sich immer auf eine Multiplication zurückführen. Die höchst einfache Regel heisst: Um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, braucht man nur den Divisor umzukehren, (seinen Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler zu machen) und dann mit diesem umgekehrten Divisor den Dividendus zu multipliciren. Diese gleich näher zu erläuternde Regel ist ganz allgemein, indem man unter ganze Zahlen 1 als Nenner schreiben und gemischte Zahlen einrichten kann. So ist z. B.

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$$
$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$
$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$
$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$
$$2\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{55}{8}$$
$$2\frac{3}{4} : 3\frac{2}{3} = \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{4}$$

Erläuterung. 1) Sind die Brüche gleichnamig, so kommt der Nenner offenbar gar nicht in Betracht, und man braucht nur mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividendus zu dividiren. So ist z. B. $\frac{6}{8} : \frac{2}{8} = \frac{6}{2} = 3$; $\frac{6}{17} : \frac{2}{17} = 3$; $\frac{6}{35} : \frac{2}{35} = 3$; $\frac{2}{8} : \frac{6}{8} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{2}{17} : \frac{6}{17} = \frac{1}{3}$ &c. Denn dass 2 Einheiten in 6 Einheiten derselben Art 3mal, und umgekehrt, 6 Einheiten in 2 Einheiten derselben Art $\frac{1}{3}$mal enthalten sind, ist klar. Dasselbe erhält man aber auch nach der gegebenen Regel, indem man mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt, nämlich:

$$\tfrac{6}{8} : \tfrac{2}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{2} = \tfrac{6}{2} = 3.$$

2) Sind die Brüche ungleichnamig, so könnte man sie erst gleichnamig machen, indem man Zähler und Nenner des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und Zähler und Nenner des Divisors mit dem Nenner des Dividendus multiplicirt. Deutet man diese vorbereitenden Operationen bloss an, z. B. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4.3}{5.3} : \frac{5.2}{5.3}$, so braucht man nur, da auf diese Weise die Brüche immer gleichnamig werden, und man also den allgemeinen Nenner wieder ausser Acht lassen kann, mit dem neuen Zähler des Divisors (5·2) in den neuen Zähler des Dividendus (4·3) zu dividiren. Bemerkt man hier die Stellung der Ziffern, so ergiebt sich hieraus die vorhin ausgesprochene leichter zu behaltende Regel: dass man den Divisor bloss umzukehren braucht. Es ist nämlich:

$$\tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} : \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{4.3}{5.2} = \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{12}{10}.$$

Eben so

$$\tfrac{5}{7} : \tfrac{2}{3} = \frac{5.3}{7.3} : \frac{7.2}{7.3} = \tfrac{5}{7} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{15}{14}.$$

Aufgaben. Dividire mit Benutzung der Rechnungsvortheile: $\frac{4}{15} : \frac{3}{15}$; $\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$; $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$; $\frac{4}{7} : \frac{5}{8}$; $\frac{3}{25} : \frac{1}{35}$; $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$; $\frac{1}{5} : 5$; $1 : \frac{1}{5}$; $1 : \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} : 1$; $\frac{5}{17} : 1$; $1 : \frac{2}{3}$; $\frac{14}{39} : 7$; $\frac{13}{17} : 17$; $3\frac{2}{3} : 7$; $11 : 5\frac{7}{9}$; $13\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$; $15\frac{4}{5} : 9\frac{7}{8}$; $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$; $\frac{4}{5} : 8$; $\frac{345}{1000} : \frac{45}{100}$; $\frac{1}{9} : \frac{1}{10}$; $\frac{1}{10} : \frac{1}{9}$; $\frac{3}{10} : \frac{17}{100}$; $25\frac{2}{3} : 16\frac{3}{4}$; $\frac{8}{5} : \frac{7}{4}$. Wie gross ist der 8te Theil von $\frac{2}{3}$ Fuss, der 5te Theil von $2\frac{5}{6}$ Rthlr., der 4te Theil von $5\frac{1}{5}$ Ell. Wie oft ist $\frac{3}{4}$ Ell. in 4 Ell., $\frac{2}{3}$ Rthlr. in 2 Rthlr., $\frac{1}{3}$ Fuss in 1 Fuss enthalten?

Antwort. Die Quotienten sind: $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{32}{35}$, $4\frac{1}{5}$, 1, 1, $\frac{1}{25}$, 5, 25, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{17}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{2}{39}$, $\frac{13}{289}$, $\frac{11}{21}$, $1\frac{47}{52}$, $20\frac{5}{8}$, $1\frac{3}{5}$, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{23}{30}$, $1\frac{1}{9}$, $\frac{9}{10}$, $1\frac{13}{17}$, $1\frac{107}{201}$, $\frac{32}{35}$, $\frac{1}{12}$ Fuss, $\frac{17}{30}$ Rthlr., $1\frac{3}{10}$ Ell., $5\frac{1}{3}$mal, 3mal, 3mal.

Fünftes Buch.

Von den Decimalbrüchen.

48.

Vorbegriffe über näherungsweise Rechnungen. In den meisten Fällen, wo die Theorie in Praxis tritt, kann und muss dieselbe von ihrer strengen Forderung ein wenig nachlassen, und sich mit einer gewissen Annäherung begnügen. Dies ist namentlich immer da der Fall, wo die Grössen, aus welchen andere berechnet werden sollen, erst durch die Erfahrung, also vermittelst unserer Sinne und sinnlicher Werkzeuge bestimmt werden, und wo demnach die Genauigkeit der Praxis von der Vollkommenheit und Beständigkeit der Sinne abhängt.

Hat man z. E. die Entfernung zweier Oerter, etwa = 2000 Fuss, unmittelbar mit einer Kette gemessen, so wird auf einer solchen Länge die Genauigkeit von einem halben Zoll mehr oder weniger nicht verbürgt und nicht verlangt werden können. Selbst in vielen Fällen, wo man durch gewisse künstliche, von Gauss erfundene Rechnungen (Wahrscheinlichkeitsrechnung), die Unvollkommenheit unserer Sinne und die daraus entsprungenen Fehler entdecken, berechnen und unschädlich machen kann, würde die möglichste Genauigkeit in den minder wichtigen Fällen nicht der Mühe lohnen.

In allen den Fällen nun, wo man in der Praxis eine völlige Genauigkeit doch nicht erreichen kann, oder nicht erreichen will, wo die Vernachlässigung eines kleinen Bruchs auf ein zu suchendes Resultat keinen nachtheiligen Einfluss hat, da kann man sich die Rechnung mit Brüchen, durch eine *gewisse Form*, welche man denselben giebt, bedeutend erleichtern, was wir hier erst durch ein Additions-Beispiel erläutern wollen. Zuvor merke man Folgendes: einen Bruch kann man ohne Veränderung seines Werths leicht auf jeden beliebigen Nenner bringen, *indem man Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs erst mit dem neuen Nenner multiplicirt, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt.* Soll z. E. $\frac{6}{8}$ auf den Nenner 12 gebracht werden, so hat man erst $\frac{6}{8} = \frac{6.12}{8.12} = \frac{72}{8.12}$, durch 8 wieder abgekürzt $= \frac{9}{12}$. Ist aber der alte Nenner in dem Producte aus dem alten Zähler und neuen Nenner nicht ohne Rest enthalten, so wird der neue Zähler eine gemischte Zahl. Bringt man z. B. $\frac{5}{8}$ auf den Nenner 12, so

ist $\frac{5}{8} = \frac{5.12}{8.12} = \frac{7\frac{1}{2}}{12} = \frac{7}{12} + \frac{\frac{1}{2}}{12}$. — Brüche, deren Zähler selbst ein Bruch ist, wie $\frac{\frac{1}{2}}{12}$, $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ &c., heissen Bruchs-Brüche. Es ist klar, dass ein Bruchsbruch desto kleiner ist, je grösser sein Nenner ist; es ist z. B. $\frac{\frac{1}{2}}{10} < \frac{\frac{1}{2}}{4}$ &c.

Will man z. B. wissen, wie viel ganze Achtel der Bruch $\frac{7}{9}$ enthält, so hat man $\frac{7}{9} = \frac{7.8}{9.8} = \frac{\frac{56}{9}}{8} = \left(\frac{6\frac{2}{9}}{8}\right) = \frac{6}{8}$. Will man nur die vollen Zehntel, Hundertel oder Tausendtel &c. haben, welche ein Bruch, z. B. $\frac{7}{8}$ enthält, so hat man:

$$\frac{7}{8} = \frac{\frac{70}{8}}{10} = \left(\frac{8\frac{6}{8}}{10}\right) = \frac{8}{10};\ \frac{7}{8} = \frac{\frac{700}{8}}{100} = \left(\frac{87\frac{1}{2}}{100}\right) = \frac{87}{100};\ \frac{7}{8} = \frac{\frac{7000}{8}}{1000} = \frac{875}{1000}.$$

Hieraus folgt: dass, wenn man dem Zähler eines Bruchs ein, zwei, drei Nullen anhängt, und mit dem Nenner dividirt, den etwa entstehenden Bruch wegwirft, der Quotient dann die Anzahl der vollen Zehntel, Hundertel, Tausendtel &c., welche der Bruch enthält, angiebt.

Bedeuten nun folgende zu addirende Pöste

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{33} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{7}{9} + \frac{5}{11} + \frac{9}{13} + \frac{13}{274} + \frac{3}{6191} + \frac{7}{117},$$

Bruchtheile von einer kleinen Einheit, wie etwa Loth, Zoll, Gr. &c. und kommt es nicht darauf an, ob man die Summe um $\frac{1}{10}$ einer solchen Einheit zu klein oder zu gross findet, so kann man die Arbeit bedeutend abkürzen, wenn man den allgemeinen Nenner (der nach § 30 eine sehr grosse Zahl werden würde) ganz willkürlich annimmt, wozu eine einfache Rangzahl, wie 10, 100, 1000 &c., offenbar am bequemsten ist. Nehmen wir in vorliegender Aufgabe 100 als den allgemeinen Nenner, so brauchen wir nur jedem Zähler (in Gedanken) zwei Nullen anzuhängen, und durch die alten Nenner zu dividiren, alsdann sind die nebenstehenden Quotienten, bei welchen Brüche unter $\frac{1}{2}$, $= 0$, und über $\frac{1}{2}$, $= 1$ gesetzt worden, die zum allgemeinen Nenner gehörigen neuen Zähler (welche sich leicht im Kopfe berechnen lassen):

	100
$\frac{1}{2}$	50
$\frac{1}{33}$	$3 + \frac{1}{33}$
$\frac{4}{5}$	80
$\frac{6}{7}$	$86 - \frac{2}{7}$
$\frac{7}{9}$	$78 - \frac{2}{9}$
$\frac{5}{11}$	$45 + \frac{5}{11}$
$\frac{9}{13}$	$69 + \frac{3}{13}$
$\frac{13}{247}$	$5 + \frac{65}{247}$
$\frac{3}{6191}$	$0 + \frac{300}{6191}$
$\frac{7}{117}$	$6 - \frac{2}{117}$
Summe	$\frac{422}{100} = 4\frac{11}{50}$.

Anmerkung. Hätte man bei dieser nähernden Berechnung auch bei jedem Zähler eine halbe Bruch-Einheit $\left(\frac{\frac{1}{2}}{100}\right)$ vernachlässigt, so würde der dadurch für alle zehn Pöste angewachsene Fehler doch erst $\frac{5}{100} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{10}\right)$ betragen haben. Da wir aber nur Brüche kleiner als $\frac{1}{2}$ vernachlässigten, und diese Fehler, weil sie bald auf die eine, bald auf die andere Seite fallen, sich zum Theil aufheben, so muss der Fehler an der Summe $4\frac{11}{50}$ noch bedeutend kleiner als $\frac{\frac{1}{2}}{10}$ sein.

Hätte man aber statt 100 eine grössere Rangzahl, 100000, 1000000 &c., zum allgemeinen Nenner genommen, wodurch die Rechnung nicht viel schwerer wird, so

würde der Fehler schon für die Sinne verschwunden sein, wenn auch die Einheit der Summe, Centner, Lsd'or, Meile &c. wäre.

49.

Der Umstand, dass man, um gewöhnliche Brüche darzustellen, immer zweierlei Zahlen, Zähler und Nenner, schreiben muss, welches nicht allein zeitraubend ist, sondern auch (besonders bei Anfertigung von Tabellen &c.), viel Raum einnimmt, die Uebersicht erschwert; sowie auch der Umstand, dass die Bruchrechnung viele vorbereitende Operationen erfordert, wie z. B. das Einrichten bei der Multiplication und Division, das Gleichnamigmachen bei der Addition und Subtraction, haben die Erfindung und den Gebrauch der Decimalbrüche veranlasst, wodurch alle jene in grösserer Praxis sehr fühlbare Unbequemlichkeiten auf einmal gehoben, die Darstellung und das Rechnen mit Brüchen ebenso einfach, als mit ganzen Zahlen gemacht worden.

50.

Decimalbruch wird nämlich jeder Bruch genannt, dessen Nenncr eine einfache Rangzahl ist, wie $\frac{873}{1000}$, $\frac{47}{100}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{1000}$ &c. Ein solcher Bruch hat nämlich, als eine nothwendige Folge seines Nenners und als Grund seiner Benennung die Eigenschaft, dass er sich immer in so viele Brüche zerlegen lässt, als der Nenner Nullen hat, und zwar so, dass die Einheiten dieser Brüche nach dem dekadischen Gesetze auf einander folgen, nämlich $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c. Es ist z. B. (weil $873 = 800 + 70 + 3$) $\frac{873}{1000} = \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{3}{1000}$; oder indem man die Nullen am Ende der Zähler gegen eben so viele ihrer Nenner ausstreicht:

$$\frac{873}{1000} = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}$$

$$\frac{34507}{100000} = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{7}{100000}$$

$$\frac{47}{1000} = \frac{0}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$$

$$\frac{47}{100000} = \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{7}{100000}$$

wo, der Gleichförmigkeit wegen, die Zähler der fehlenden Zehntel &c. durch Nullen ergänzt sind.

51.

Aus der gezeigten Zergliederung ist zu ersehen, dass, wenn der Zähler eines Decimalbruchs so viele Ziffern hat, als sein Nenner Nullen, wie $\frac{875}{1000}$, $\frac{11}{100}$ &c. oder wenn, der Gleichförmigkeit wegen, die fehlenden Ziffern im Zähler durch vorgesetzte Nullen ergänzt werden, wie $\frac{47}{1000} = \frac{047}{1000}$, $\frac{47}{10000} = \frac{0047}{10000}$ &c., alsdann die erste Ziffer im Zähler die Anzahl der Zehntel (oder fehlenden Zehntel), die zweite Ziffer die Anzahl der Hundertel enthält, und so nach diesem Gesetze weiter.

Diese Bemerkung führt nun sogleich zu dem gebräuchlichen Verfahren, die Decimalbrüche weit einfacher ohne ihre Nenner zu schreiben. Man schneidet nämlich mittelst eines Decimalzeichens (Punct oder Komma) rückwärts vom Zähler des Decimalbruchs so viele Ziffern ab, als sein Nenner Nullen hat (indem man die fehlenden Ziffern im Zähler durch vorgesetzte Nullen ergänzt). Links vor das Decimalzeichen setze man endlich noch eine Null, oder die etwaigen ganzen Einheiten, welche der Decimalbruch enthält oder bei sich hat. Alsdann bedeuten die links vor dem Decimalzeichen stehenden Ziffern ganze Einheiten; die rechts auf das Decimalzeichen folgenden aber Bruch-Einheiten, und zwar die erste Ziffer Zehntel, die zweite Ziffer Hundertel &c. So schreibt man z. E.:

$\frac{875}{1000} = 0{,}875$ (lies: 0 Ganze, 8 Zehntel, 7 Hundertel &c.)

$2\frac{875}{1000} = 2{,}875$ (2 Ganze, 8 Zehntel &c.)

$\frac{47}{10000} = 0{,}0047$ (0 Ganze, 0 Zehntel, 0 Hundertel, 4 Tausendtel &c.)

$5\frac{47}{1000} = 5{,}047$; $\frac{24805}{1000} = 24{,}805$; $32\frac{5}{100} = 32{,}05$.

Es ist also leicht, einen Decimalbruch ohne Nenner zu schreiben, und umgekehrt, einen ohne Nenner geschriebenen Decimalbruch wieder in gewöhnlicher Bruchsform herzustellen, indem man ihm nur eine einfache Rangzahl mit so vielen Nullen unterzuschreiben braucht, als Decimalstellen auf das Decimalzeichen folgen, und dann das Decimalzeichen wieder weglässt, so ist z. B.

$0{,}875 = \frac{875}{1000}$; $0{,}0071 = \frac{0071}{10000} = \frac{71}{10000}$ &c.

Aufgaben. 1) Wie schreibt man folgende Decimalbrüche ohne Nenner: $\frac{5}{10}$; $\frac{1}{10}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{101}{10000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{376}{10000}$, $\frac{2005}{100000}$, $\frac{501007}{1000000}$, $3\frac{2}{10}$, $728\frac{47}{100}$, $10\frac{15}{1000}$, $11\frac{1101}{100000}$, $\frac{50013}{1000}$, $\frac{705}{10}$.

Antwort. 0,5; 0,1; 0,13; 0,03; 0,0101; 0,0001; 0,003; 0,75; 0,0376; 0,02005; 0,501007; 3,2; 728,47; 10,015; 11,01101; 50,013; 70,5.

2) Wie schreibt man folgende Decimalbrüche mit untergelegtem Nenner: 0,54; 0,015; 2,004; 30,07; 0,005; 100,001.

Antwort. $\frac{54}{100}$, $\frac{15}{1000}$, $\frac{2004}{1000} = 2\frac{4}{1000}$, $30\frac{7}{100} = \frac{3007}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $100\frac{1}{1000} = \frac{100001}{1000}$.

52.

Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Der Gebrauch der Decimalbrüche findet besonders in der angewandten Mathematik Statt, und namentlich bei den Rechnungen mit Wurzelgrössen und Logarithmen, welche dieselben gar nicht entbehren können, und ihre Einführung eigentlich zuerst veranlasst haben. Obgleich nun in der Praxis die Decimalbrüche sich fast immer von selbst in gehöriger Form darstellen, so ist es doch auch manchmal erforderlich, einen gewöhnlichen ächten Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln und dies geschieht am leichtesten auf

folgende Weise: Man setze erst 0 als Ganze und das Decimalzeichen, hänge darauf dem Zähler eine Null an und dividire mit dem Nenner, so giebt der Quotient die Anzahl der vollen Zehntel an, welche der Bruch enthält (an dessen Stelle man aber eine Null setzen muss, wenn der Bruch keine Zehntel enthält), dem Rest hänge man wieder eine Null an, und dividire abermals durch den Nenner, so erhält man Hundertel, und so fahre man fort bis die Division entweder aufgeht, oder bis man so viele Decimalen bestimmt hat, als es die Genauigkeit der Rechnung verlangt. Mehr als sieben Decimalstellen sind höchst selten erforderlich. Manchmal genügen schon zwei, drei oder fünf. Die letzte Decimale pflegt man um eine Einheit zu vergrössern, wenn die folgende eine 5 oder darüber ist. Wollte man von dem Bruche 0,8468 nur die drei ersten Decimalstellen beibehalten, so würde 0,847 den wahren Werth genauer darstellen als 0,846, ersterer ist nur um $\frac{2}{10000}$ zu gross, letzterer aber um $\frac{8}{10000}$ zu klein. Lässt sich der Nenner des in einen Decimalbruch umzuformenden Bruchs in die einfachen Factoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{3}{8} = \frac{3}{2.2.2}$; $\frac{3}{20} = \frac{3}{2.2.5}$ &c., so muss die Division, wenn man sie so weit treiben wollte, jedesmal ein Ende nehmen; lässt sich aber der Nenner nicht in die einfachen Factoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{5}{6} = \frac{5}{2.3}$; $\frac{4}{15} = \frac{4}{3.5}$ &c., so kann die Division auch niemals aufgehen (§ 317). Beispiele:

$$\frac{3}{16} = 0{,}1875;\ \frac{7}{8} = 0{,}875;\ \frac{6}{2117} = 0{,}0028\ldots$$

Man sage nämlich: 16 in 3 giebt 0 Ganze, 16 in 30 giebt 1 Zehntel und 14 als Rest, 16 in 140 giebt 8 Hundertel &c.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, denn ob man z. B. nach (§ 48) Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ erst mit einer Rangzahl multiplicirt, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt und den dadurch entstehenden Bruch nach (§ 51) ohne Nenner schreibt, oder ob man dem Zähler die Nullen nach und nach anhängt, das ist einerlei. Man hat z. B.

$$\frac{3}{16} + \frac{3000}{16 . 1000} = \frac{187\frac{8}{16}}{1000} = 0{,}187.$$

Anmerkungen. 1) Ist der umzuformende Bruch unächt, so muss man natürlich erst die Ganzen herausziehen und diese statt der Null vor das Decimalzeichen setzen, z. B. $\frac{21}{8} = 2{,}625$; $2\frac{3}{4} = 2{,}75$ &c.

2) Wenn man einen Decimalbruch rechts noch beliebig viele Nullen anhängt, so wird dadurch der Werth desselben nicht geändert, indem dies eben so gleichgültig ist, als wenn man einer ganzen Zahl noch Nullen vorsetzt. So ist z. B. 0,54 = 0,540 = 0,5400 &c. Man kann also, wenn es die Gleichförmigkeit fordert, mehreren Decimalbrüchen durch angehängte Nullen leicht gleich viele Decimalstellen geben, d. h. sie gleichnamig machen.

3) Wenn beim Umbilden eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch die Division kein Ende nimmt, so müssen, wenn die Division weit genug getrieben wird, nothwendig einige Decimalstellen immer in derselben Ordnung

(periodisch) wiederkehren. Solche Brüche pflegt man wohl **periodische Decimalbrüche** zu nennen und die Wiederholung der Perioden durch Puncte anzudeuten. So ist z. E. $\frac{5}{99} = 0{,}0505\ldots$, $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

Aufgaben. Folgende Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, und zwar wenn die Division nicht früher aufgeht, bis auf 5 Decimalstellen genau: $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{100}{3374}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{11}{474}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3700}{301}$, $\frac{1595}{245}$, $\frac{300}{1157}$, $20\frac{3}{8}$, $304\frac{5}{7}$, $\frac{1}{193}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{37}{36000}$, $\frac{141}{40000}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{3}{200}$, $\frac{77}{600}$.

Antwort. 0,75; 0,36; 0,71429; 0,111...; 0,22...; 0,44...; 0,5; 0,4; 0,02963; 0,0101...; 0,02321; 0,125; 12,29236; 6,5102; 0,25929; 20,375; 304,71429; 0,00518; 0,1; 0,003; 0,00103; 0,00352; 0,175; 0,015; 0,128333...

53.

Bei einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch findet das Decimalsystem überall statt, nämlich auch im Uebergange von den Bruch-Einheiten zu den ganzen. In der Zahl

20704,56803

gelten z. B. 10 Einheiten der zweiten Decimale (6) eine Einheit der nächst vorhergehenden Ziffer (5) $(10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10})$; zehn Einheiten der Ziffer 5 eine Einheit der folgenden Ziffer (4) $(10 \cdot \frac{1}{10} = 1)$ &c. Aus dieser Ursache ist nun auch das Rechnen mit Decimalbrüchen ebenso wie mit ganzen Zahlen; nur auf die richtige Stellung des Decimalzeichens muss man ein wenig Aufmerksamkeit richten.

54.

Addition. Man schreibt die Grössen so unter einander, dass die Decimalzeichen und mithin gleichnamige Einheiten über einander stehen, Einer unter Einer, Zehntel unter Zehntel &c., addirt dann wie gewöhnlich, indem man für je zehn Einheiten einer Reihe eine Einheit auf die nächst höhere überträgt. Sind einige von den Grössen gewöhnliche Brüche, so muss man sie erst in Decimalbrüche verwandeln. So findet man z. B.

$$0{,}72 + 0{,}087 + 2{,}5 + 14{,}0089 = 17{,}3159.$$

$$0{,}05012 + 30{,}0707\ldots + 0{,}66\ldots + \tfrac{5}{6} + 2\tfrac{3}{4} = 34{,}370827$$

$$10{,}3131\ldots + 9{,}11\ldots + 0{,}503 + 0{,}003 + 0{,}1 = 20{,}0303.$$

	0,05012.
0,72..	30,070707
0,087.	0,666667
2,5...	$\frac{5}{6}$ = 0,833333
14,0089	$2\frac{3}{4}$ = 2,75....
17,3159	34,370827

55.

Subtraction. Man schreibt Subtrahendus und Minuendus in derselben Ordnung wie bei der Addition unter einander; ist einer von ihnen ein gewöhnlicher Bruch, so muss man ihn erst zu einem Decimalbruch machen, und alsdann wie gewöhnlich subtrahiren. Es ist z. B.

Minuend.	1,0407	8,000	13,66667	$\frac{3}{4}$ = 0,75..
Subtr.	0,9745	7,995	3,67809	0,2305
Differ.	0,0662	0,005	9,98858	0,5195

56.

Multiplication. Regel: Man multiplicire wie bei ganzen Zahlen, ohne auf die Decimalzeichen der Factoren zu achten, schneide aber vom Product rückwärts so viele Decimalen wieder ab, als die Factoren Decimalen zusammen enthalten, indem man die, welche das Product weniger hat, durch vorgesetzte Nullen ergänzt. Beispiele:

(1)	(2)	(3)
0,43	8,034	0,0478
0,25	0,46	0,003
215	48204	0,0001434
86	32136	
0,1075	3,69564	

(4)	(5)	(6)
4,03	0,035	0,056
2,15	2,04	24
2015	140	224
403	70	112
806	0,07140	1,344
8,6645		

Bei (1) haben beide Factoren zusammen vier Decimalen, bei (2) fünf, bei (3) sieben, bei (4) vier, bei (5) fünf, bei (6) drei.

Die Richtigkeit dieser Regel erklärt sich von selbst, wenn man die Decimalbrüche mit untergelegtem Nenner geschrieben denkt, dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, und den erhaltenen Bruch wieder ohne Nenner darstellt. So ist z. E.:

$$(0{,}43)\,(0{,}25) = \tfrac{43}{100} \cdot \tfrac{25}{100} = \tfrac{1075}{10000} = 0{,}1075;$$

(der Nenner des Products erhält nämlich so viele Nullen, als beide Factoren Decimalstellen enthalten;)

$$8{,}034 \cdot 0{,}46 = \tfrac{8034}{1000} \cdot \tfrac{46}{100} = \tfrac{369564}{100000} = 3{,}69564.$$

$$0{,}056 \cdot 24 = \tfrac{56}{1000} \cdot 24 = \tfrac{1344}{1000} = 1{,}344 \text{ (§ 51).}$$

Anmerkung. Ist ein Decimalbruch mit einer einfachen Rangzahl zu multipliciren, so braucht man das Decimalzeichen nur um so viele Stellen zurückzuschieben, als die Rangzahl Nullen enthält. Es ist z. B.: 10 (0,045) = 0,45; 100 (0,045) = 4,5; 1000 (0,045) = 45; 10000 (0,045) = 450; 100 (2,003) = 200,3.

Aufgaben. Folgende angedeutete Multiplication zu entwickeln: (0,057) (0,005); (0,205) (7,04); (1,09) (1,003); 11 . (1,1036); (0,013) . 101; (203,07) (105,002); 100 . (0,031); (0,2) . 100; 1000 . (31,0451); (21,005) (0,74) (0,07).

Antwort. Die Producte sind: 0,000285; 1,4432; 1,09327; 12,1396; 1,313; 21322,75614; 3,1; 20; 31045,1; 1,088059.

57.

Division. R e g e l: Haben Dividendus und Divisor nicht gleich viel Decimalen, so hänge man dem, der weniger hat, so viele Nullen an, bis beide gleich viel haben (§ 52, 2), alsdann dividire man mit Weglassung der Decimalzeichen, wie gewöhnlich, indem man einen etwaigen Bruch gleich in einen Decimalbruch auflöst. (§ 52.)

Denn wenn beide Brüche gleich viel Decimalen haben, so haben sie auch, als gewöhnliche Brüche geschrieben, einerlei Nenner, der bei der Division nicht in Betracht kommt. So ist z. B.

$$\frac{0,34}{0,17} = \frac{34}{17} = 2; \left(\text{weil } \frac{0,34}{0,17} = \frac{34}{100} : \frac{17}{100} = \frac{34}{17}\right)$$

$$\frac{0,35}{0,4073} = \frac{3500}{4073} = 0,85932; \left(\text{weil } \frac{0,35}{0,4073} = \frac{3500}{10000} : \frac{4073}{10000}\right)$$

$$\frac{0,057}{3,2} = \frac{0,057}{3,200} = \frac{57}{3200} = 0,01781; \left(= \frac{57}{1000} : \frac{3200}{1000}\right)$$

$$\frac{8}{0,245} = \frac{8,000}{0,245} = \frac{8000}{245} = 32,65306;$$

$$\frac{3,645}{8} = \frac{3,645}{8,000} = \frac{3645}{8000} = 0,455625;$$

Anmerkungen. 1) Ist der Divisor eine ganze Zahl, so verfährt man kürzer, wenn man jede Ziffer des Dividendus dividirt, und zu dem etwaigen Reste die folgende Ziffer setzt, z. B. $\frac{3,645}{8} = 0,455625$. (Man sage nämlich: der 8te Theil von 3 Ganzen giebt 0 Ganze, der 8te Theil von 36 Zehntel giebt 4 Zehntel etc.). Eben so ist $\frac{0,06305}{12} = 0,005254..$

2) Ist ein Decimalbruch durch eine einfache Rangzahl zu dividiren, so braucht man nur das Decimalzeichen so viele Stellen vorwärts zu schieben, als die Rangzahl Nullen hat. So ist z. B.:

$$\frac{320,45}{100} = 3,2045; \quad \frac{5,23}{10} = 0,523; \quad \frac{1,04}{100} = 0,0104.$$

3) Ist ein Decimalbruch mit einem gewöhnlichen Bruche zu m u l t i p l i c i r e n, so könnte man letztern erst in einen Decimalbruch verwandeln, leichter erhält man aber das Product, wenn man mit seinem Nenner dividirt, und mit seinem Zähler multiplicirt. So ist z. B.:

$$\tfrac{2}{3} . (6,0435) = 2 . \frac{6,0435}{3} = 2 . (2,0145) = 4,029;$$

$$\tfrac{3}{4} . (0,25) = \frac{0,75}{4} = 0,1875.$$

4) Ist ein Decimalbruch durch einen gewöhnlichen Bruch zu dividiren, so kann man mit dem umgekehrten Divisor multipliciren; z. B.:

$$0,326 : \tfrac{3}{4} = 0,326 \,.\, \tfrac{4}{3} = \frac{1,304}{3} = 0,43466\ldots$$

5) Ist ein gewöhnlicher Bruch durch einen Decimalbruch zu dividiren, so muss man erstern in einen Decimalbruch verwandeln, oder dem Decimalbruch seinen Nenner unterschreiben, ihn dann umkehren und multipliciren. Es ist z. B.:

$$\tfrac{3}{4} : 0,321 = \frac{0,75}{0,321} = \tfrac{750}{321} = 2,3364 \text{ oder auch}$$

$$\tfrac{3}{4} : 0,321 = \tfrac{3}{4} : \tfrac{321}{1000} = \tfrac{3}{4} \,.\, \tfrac{1000}{321} = 2,3364.$$

Aufgaben. Man vollziehe folgende angedeutete Divisionen bis auf 4 Decimalen:

$\frac{0,305}{0,506}$, $\frac{0,0578}{0,23}$, $\frac{2,035}{0,76}$, $\frac{0,03}{8,134}$, $\frac{3,207}{4,085}$, $\frac{0,091}{183}$, $\frac{25}{0,507}$, $\frac{0,0453}{8}$, $\frac{2,1616..}{12}$, $\frac{0,04}{10}$, $\frac{540,047}{1000}$,

$\frac{0,04}{100}$, $\frac{8471}{100}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{35}{1000}$, $\frac{1}{0,305}$, $\frac{1}{1,012}$, $\frac{2}{3,05}$,

$\tfrac{2}{7} : 0,14$; $4,03 : \tfrac{2}{3}$; $0,1875 : \tfrac{3}{4}$; $0,056 : \tfrac{3}{7}$; $0,435 : 2\tfrac{3}{4}$; $\tfrac{3}{8} : 0,05$; $\left(\frac{0,03}{0,05}\right) \cdot \tfrac{2}{3}$

Antwort. Die Quotienten sind: 0,6028; 0,2513; 2,6776; 0,0037; 0,785; 0,0005; 49,3097; 0,0056; 0,1801; 0,004; 0,540047; 0,0004; 84,71; 0,01; 0,035; 3,2787; 0,9882; 0,6557; 2,0408..; 6,045; 0,25; 0,13066..; 0,1581; 7,5; 0,4.

Sechstes Buch.

Rechnung mit benannten Zahlen.

Wer mit unbenannten Zahlen rechnen kann, kann es auch mit benannten, nur die Kenntniss der verschiedenen Unterabtheilungen der benannten Einheiten, oder ein Münz-, Maass- und Gewichts-System, aus welchem man sich erforderlichen Falls Raths erholen kann, ist hiezu erforderlich.

58.

Addition. Sind mehrnamige Grössen zu addiren, so stelle man die gleichnamigen Einheiten unter einander, und addire dann, bei der niedrigsten Sorte anfangend, welche man gleich auf höhere reducirt. Beispiele:

8 Thlr.	14 Sgr.	7 Pf.
11 „	20 „	9½ „
126 „	17 „	4¾ „
— „	19 „	5 „
5 „	2 „	6 „
2	2	
152 Thlr.	14 Sgr.	8¼ Pf.

34 Pfd.	2 Loth	3 Qtch.
9 „	— „	1 „
17 „	27 „	— „
— „	30 „	— „
34 „	— „	2 „
95 Pfd.	28 Loth	2 Qtch.

59.

Subtraction. Die Stellung ist hier wie oben. Ist eine Anzahl Einheiten im Subtrahendus grösser, als die darüber stehende im Minuendus, so muss man von den nächst höhern Einheiten im Minuendus eine Einheit herüber nehmen. Beispiele:

6 Thlr.	16 Sgr.	3 Pf.
3 „	18 „	7 „
2 „	27 „	8 „

14 Fuss	6 Zoll	3 Lin.
7′ „	11′ „	11‴ „
6′ „	6″ „	4‴ „

10 St.	45 Min.	30 S.
7^h „	59′ „	45″ „
2^h „	45′ „	45″ „

Ein paar Subtractions-Beispiele aus der Zeitrechnung mögen hier noch Platz finden, weil sie eher, als die obigen leichten Fälle, einer Erläuterung bedürfen.

Um den Unterschied zweier Zeiträume, welche beide von einem und demselben Anfange (Christi Geburt) gerechnet und in Jahren und Datum ausgedrückt sind, zu finden, muss man die Zeiträume erst etwas anders ausdrücken, nämlich durch die wirklich verflossenen Jahre, Monate, Tage, Stunden &c. und sich dabei erinnern, dass der bürgerliche Tag (Datum) um Mitternacht (12 Uhr) anfängt, und $2 \cdot 12 = 24$ Stunden dauert. Die z. B. bis 1834 den 25. April Abends 7 Uhr wirklich verflossene Zeit beträgt hiernach: 1833 volle Jahre, 3 volle Monate, 24 volle Tage und $12 + 7 = 19$ Stunden. Februar ausgenommen, welcher in jedem gemeinen Jahre 28 und in jedem Schaltjahre (jedes durch 4 ohne Rest theilbare Jahr) 29 Tage hat, findet man die Tage der übrigen Monate sehr leicht nach der bekannten Regel: dass, wenn man, vom Zeigefinger angefangen, die Knöchel der Hand und die Zwischenplätze zweimal quer durchzählt und zugleich die Namen der Monate vom Januar an, der Reihe nach hernennt, jeder auf einen der Knöchel treffende Monat 31, und jeder dazwischen fallende 30 Tage hat

Aufgabe. 1) Welche Zeit ist von 1790 den 24. Octobr. 5 Uhr 31 Minuten Nachmittags bis 1832 den 22. März 11 Uhr 27 Minuten Vormittags verflossen?

Auflösung. Die verflossene Zeit bis:

													29{					
1832.	März	22,	11	U.	27	M.	Vorm.	= 1831	J.	2	M.		21	T.	11	St.	27	M.
1790.	Oct.	24,	5	„	31	„	Nachm.	= 1789	„	9	„		23	„	17	„	31	„
					Also die verfl. Zeit			= 41	J.	4	M.		26	T.	17	St.	56	M.

Der hier entlehnte zweite Monat Februar fällt in das Schaltjahr 1832.

Aufgabe. Wann wird seit 1819 den 17. Juli 11 Uhr 25 Minuten Nachm. eine Zeit von 60 Jahren 2 Monaten 16 Tagen 17 Stunden und 50 Minuten verflossen sein?

Auflösung. Die bis 1819 den 17. Juli verflossene Zeit ist:

	= 1818	J.	6	M.	16	T.	23	St.	25	M.
Hiezu addirt	60	„	2	„	16	„	17	„	50	„
	1878	J.	9	M.	3	T.	17	St.	15	M.
	1879 den 4. Oct. 5¼ Uhr Nachm.									

60.

Multiplication. Der Multiplicator muss bei jeder Multiplication eine unbenannte Zahl sein, indem man keine Begriffe mit einander multipliciren kann. Ist nun der Multiplicandus eine mehrnamige Grösse, so kann man jede Sorte besonders multipliciren und dann das Product auf höhere Einheiten reduciren. Einige kleine Rechnungsvortheile, welche sich hiebei in besonders günstigen Fällen (durch die sogenannte Zerstreuungsmethode) anbringen lassen, finden sich von selbst. Frägt man z. B. wie viel 7 Pfund einer gewissen Waare kosten, wenn das Pfund 2 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf. kostet, so muss

man letztere Grösse 7mal nehmen, oder mit der unbenannten Zahl 7 multipliciren, nämlich:

2 Thlr.	6 Sgr.	8 Pf.
		7
15 Thlr.	16 Sgr.	8 Pf.

Aufgaben. 1) 7 Fuss 8 Zoll 3 Linien $5\frac{5}{7}$mal zu nehmen.
2) Die Grösse 2 Pfund 4 Loth 3 Quentchen $2\frac{3}{4}$mal zu nehmen.
3) Die Grösse 3 Stunden 26 Minuten 12 Secunden mit $\frac{5}{6}$ zu multipliciren.

Antwort. Die Producte sind: 43 Fuss 11 Zoll $1\frac{5}{7}$ Linien; 5 Pfund 29 Loth $\frac{1}{4}$ Quentchen; 2 Stunden 51 Minuten 50 Secunden.

61.

Division. Erster Fall. Soll vom Dividendus ein bestimmter Theil angegeben werden, so ist der Divisor immer unbenannt, der Quotient aber, als ein Theil des Dividendus, auch wie dieser benannt. Man dividirt, bei der höchsten Sorte anfangend, indem man etwaige Bruchtheile von höheren Einheiten in nächst niedere Einheiten auflöst. Sucht man z. E. den 8ten Theil von 12 Pfund 17 Loth 3 Qtch., so hat man:

$$8)\ \frac{12 \text{ Pfund } 17 \text{ Loth } 3 \text{ Qtch.}}{1 \text{ Pfund } 18 \text{ Loth } \frac{7}{8} \text{ Qtch.}}$$

Zweiter Fall. Sind beide, Divisor und Dividend, benannt, so müssen beide erst auf einerlei Einheit, entweder auf die niedrigste oder höchste, reducirt werden, weil man nur gleichnamige Einheiten durch einander dividiren kann. Der Quotient ist in diesem Fall eine unbenannte Zahl, der bloss das Verhältniss des als Einheit betrach teten Divisors zum Dividendus ausdrückt. Frägt man z. B., wie oft 2 Pfund 24 Loth in 6 Pfund 13 Loth 2 Quentchen enthalten ist, so hat man:

$$6 \text{ Pf. } 13 \text{ Loth } 2 \text{ Qtch.} = 822 \text{ Qtch. oder } = 6\tfrac{27}{64} \text{ Pf.}$$
$$\text{und } 2 \text{ „ } 24 \text{ „ } = 352 \text{ „ „ } = 2\tfrac{3}{4} \text{ „}$$

$$\text{mithin: } \frac{6 \text{ Pf. } 13 \text{ Loth } 2 \text{ Qtch.}}{2 \text{ Pf. } 24 \text{ Loth}} = \frac{822 \text{ Qtch.}}{352 \text{ Qtch.}} = \frac{6\frac{27}{64} \text{ Pf.}}{2\frac{3}{4} \text{ Pf.}} = 2\tfrac{59}{176} \text{mal.}$$

Aufgaben. 1) Wie viel mal ist 8 Fuss 11 Zoll 5 Linien grösser, als 2 Fuss 5 Zoll 6 Linien?
2) Wie gross ist der 24ste Theil von 130 Thlr. 20 Sgr.?
3) Wie viel mal ist der Zeitraum von 6 Stunden 34 Minuten 54 Secunden grösser, als 4 Stunden 16 Minuten?

Antwort. 1) $3\frac{227}{354}$mal. 2) 5 Thlr. 13 Sgr. 4 Pf. 3) $1\frac{1389}{2560}$mal.

Siebentes Buch.

Von den graden, umgekehrten und zusammengesetzten Verhältnissen. (Regel de tri.)

62.

Grades Verhältniss. Wenn zwei Grössen so von einander abhängen, dass, wenn die eine sich ändert und einigemal grösser oder kleiner wird, auch die andere eben so viel mal grösser oder kleiner genommen werden muss, so sagt man: beide Grössen stehen im **graden Verhältniss** zu einander. So steht z. B. die Menge einer Waare mit ihrem Werth in gradem Verhältniss, denn für 2-, 3mal so viel Waare muss man auch einen 2-, 3mal grössern Preis geben, für $\frac{1}{3}$ der Waare auch nur $\frac{1}{3}$ des Preises &c.

Aufgaben dieser Art, wo nämlich die Aenderung einer Grösse gegeben ist, und die Aenderung der andern abhängigen Grösse gesucht wird, kommen im gemeinen Leben grade am häufigsten vor. Schluss und Ansatz ist aber bei allen derselbe, und wer nur eine dieser leichtesten Aufgaben gehörig verstanden hat, kann auch alle übrigen machen.

Beispiel. Wenn 5 Ellen Tuch 6 Thlr. kosten, wie theuer kommen dann im gleichen Verhältniss 100 Ellen?

Erste Auflösung. Für je 5 Ellen müssen 6 Thlr. bezahlt werden, so oft also die als Maassstab gegebene Grösse, 5 Ellen, in der sogenannten Fragezahl (d. h. die, nach deren Werth gefragt wird) enthalten ist, so oft muss man 6 Thlr. setzen, daher ist der gesuchte Werth

$$= \frac{100 \text{ Ellen}}{5 \text{ Ellen}} \cdot 6 \text{ Thlr.} = \frac{100}{5} \cdot 6 \text{ Thlr.} = 20 \cdot 6 \text{ Thlr.} = 120 \text{ Thlr.} \; (\S\, 61, 2.)$$

Zweite Auflösung. Man kann auch die als Maassstab gegebene Grösse erst auf die wirkliche Einheit reduciren und so schliessen: da 5 Ellen 6 Thlr. kosten, so kostet 1 Elle, nämlich der 5te Theil, $\frac{6}{5}$ Thlr., und mithin ist der Preis für 100 Ellen:

$$= 100 \cdot \tfrac{6}{5} \text{ Thlr.} = 120 \text{ Thlr.} \quad (\S\ 60.)$$

Beide Schlussformen lassen sich auch in die leicht zu behaltende Regel, den sogenannten Dreisatz, oder Regel de tri, bringen. Man sage nämlich:

5 Ellen geben 6 Thlr., wie viel 100 Ellen?

und multiplicire die beiden hinteren Glieder mit einander und dividire das Product durch das erste Glied, indem man hiebei die beiden ein- und gleichnamigen äussern Glieder als unbenannte Zahlen betrachtet. Deutet man diese Operationen vorläufig nur an, so kann man, der leichtern Rechnung wegen, die etwaigen Factoren, welche Dividend und Divisor gemeinschaftlich haben, erst gegen einander aufheben.

Dass die beiden äussern Glieder, im Fall sie mehrnamig sind, erst auf einnamige reducirt werden müssen, entweder auf die niedrigste Einheit oder (was in der Regel kürzere Rechnung giebt) auf die höchste Einheit, indem man niedere als Bruchtheile der höhern ausdrückt, folgt schon aus § 61, 2. Wenn übrigens zwei Grössen im graden Verhältniss zu einander stehen, so müssen immer die beiden gleichlautenden Steigerungen: je mehr — je mehr, oder je weniger — je weniger Statt finden, wodurch dieses grade Verhältniss leicht von dem im folgenden § zu erwähnenden umgekehrten Verhältniss zu unterscheiden ist.

Aufgaben. 100 Thlr. bringen in einem Jahre 5 Thlr. Zinsen, wie viel Zinsen bringt hiernach ein Capital von 625 Thlr. in einem Jahre?

Antwort. $\frac{625}{100}.5 = 31\frac{1}{4}$ Thlr. (je mehr Capital, je mehr Zinsen, so oft 100 in 625 enthalten ist, so oft 5 Thlr., oder 100 geben 5, wie viel 625?)

2) Wie viel Zinsen bringt ein Capital von 1065 Thlr 6 Sgr., welches ein Jahr zu 5 pro Cent steht (pro Cent, für hundert)?

Antwort. 53 Thlr. 7 Sgr. $9\frac{3}{5}$ Pf.

3) 14560 Thlr. bringen in einem Jahre 364 Thlr. Zinsen, zu wie viel pro Cent (%) ist es belegt, d. h. wie viel Zinsen geben 100 Thlr.?

Antwort. $\frac{100}{14560}.364 = 2\frac{1}{2}$ %.

Bei der Zinsenrechnung wird immer eine gewisse Zeit als Einheit angenommen, z. B. 1 Jahr, $\frac{1}{2}$ Jahr, 1 Monat &c. Wird nun ein Capital früher oder später bezahlt, so müssen die nach der festgesetzten Zeit-Einheit fälligen Zinsen noch so viel mal grösser oder kleiner genommen werden, als die verflossene Zeit grösser oder kleiner ist, als die festgesetzte Zeit-Einheit. Beispiele:

4) Wie viel Zinsen trägt ein Capital von 600 Thlr. in 3 Jahren, wenn es zu 4% jährlich belegt ist?

Antwort. $\frac{600}{100}.4.3 = 72$ Thlr.

5) Wie viel Zinsen bringt ein Capital von 34 Thlr. 15 Sgr. in 6 Jahren 3 Monaten zu $2\frac{1}{3}$ %?

Antwort. $\frac{34\frac{1}{2}}{100}.2\frac{1}{3}.6\frac{1}{4} = \frac{69}{2.100}.\frac{7}{3}.\frac{25}{4} = \frac{23.7}{2.4.4} = \frac{161}{32} = 5\frac{1}{32}$ Thlr.

6) Wie viel betragen die 14tägigen Zinsen von 73 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. zu 5% jährlich?

Antwort. $\frac{73\frac{3}{4}}{100}.5.\frac{14}{365} = \frac{295}{4.100}.5.\frac{14}{365} = \frac{59}{2.20}.\frac{7}{73} = \frac{413}{2920}$ Thlr. $= 4\frac{71}{292}$ Sgr.

Wenn ein ohne Zinsen zahlbares Capital, Wechsel &c., vor dem Verfalltage entrichtet wird, so muss dem Inhaber für den entbehrten Nutzen ein gewisser nach einer festgesetzten Zeit-Einheit procentweise bestimmter Abzug gestattet werden. Beispiel:

7) Ein erst nach 4 Wochen zahlbarer Wechsel von 600 Thlr. wird sogleich mit 8% (jährlichem) Abzug (Discont, Escompt, Rabatt) bezahlt, wie viel beträgt der Abzug?

Antwort. $\frac{600}{100} \cdot 8 \cdot \frac{1}{13} = \frac{6 \cdot 8}{13} = 3\frac{9}{13}$ Thlr.

63.

Umgekehrtes Verhältniss. Wenn zwei Grössen so von einander abhängen, dass, wenn die eine einigemal grösser oder kleiner wird, die andere grade umgekehrt so viel mal kleiner oder grösser genommen werden muss, so sagt man: beide Grössen stehen im umgekehrten Verhältnisse zu einander. In diesem Fall müssen immer die entgegengesetzten Steigerungen Statt finden: je mehr — je weniger, oder je weniger — je mehr, wodurch dies umgekehrte Verhältniss leicht zu erkennen ist.

Wenn z. E. 4 Arbeiter 6 Tage zu einer gewissen Arbeit gebrauchen, so werden 2mal so viel oder 8 Arbeiter nicht auch 2mal so viel Zeit, sondern grade umgekehrt nur $\frac{1}{2}$mal so viel Zeit dazu gebrauchen &c.; denn je mehr Arbeiter, je weniger Zeit, d. h. die Zahl der Arbeiter steht mit der Zeit, welche zur Arbeit erforderlich ist, im umgekehrten Verhältniss. Eben so: wenn 4 Arbeiter in 6 Tagen eine gewisse Arbeit verfertigen können, und nun gefragt wird: wie viel Arbeiter angestellt werden müssen, um dieselbe Arbeit in zwei Tagen zu vollenden, so muss man offenbar schliessen, so viel mal die Zeit kleiner ist, so viel mal mehr Arbeiter müssen angestellt werden. Man muss nämlich bei allen Aufgaben dieser Art die Fragezahl durch die als Maassstab gegebene Grösse dividiren, und mit diesem Quotienten die dritte abzuändernde Grösse dividiren, oder, was dasselbe ist, mit dem umgekehrten Quotienten multipliciren, so dass also die Fragezahl hier immer als Divisor gebraucht wird. Nach der Regel de tri angesetzt, muss man die beiden ersten Glieder mit einander multipliciren und durch das dritte Glied dividiren, mithin die beim graden Verhältniss gegebene Regel umkehren, weshalb sie auch hier umgekehrte Regel de tri genannt wird.

Aufgaben. 1) Sechs Arbeiter machen eine Arbeit in 3 Tagen, wie viel Arbeiter müssen angestellt werden, um die Arbeit in 2 Tagen zu vollenden?

Antwort. $\frac{3}{2} \cdot 6 = 9$ Arbeiter.

Oder: 3 Tage erfordern 6 Arbeiter, wie viel 2 Tage?

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ 2 & \underline{18} \\ & 9 \end{array}$$

Arbeiter.

2) 6 Mann brauchen zu einer Arbeit 7 Stunden, wie viel Stunden brauchen hiezu 8 Arbeiter?

Antwort. $\frac{6}{8} \cdot 7 = 5\frac{1}{4}$ Stunden. (Je mehr Arbeiter, je weniger Zeit.)

3) Von einem $\frac{11}{4}$ breiten Tuche braucht man $4\frac{1}{2}$ Ellen zu einem Kleide, wie viel Ellen braucht man von einem Tuche, welches $\frac{9}{4}$ breit ist?

Antwort. So viel mal weniger breit, so viel mal mehr Tuch, daher:

$$\frac{\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}}\cdot 4\tfrac{1}{2}=\frac{11}{9}\cdot\frac{9}{2}=5\tfrac{1}{2}\text{ Ellen.}$$

4) In einer Festung befinden sich 600 Mann, welche auf 4 Monat so mit Brod versorgt sind, dass jeder täglich 2 Pfund erhalten kann, wie viel Pfund Brod aber wird jeder erhalten können, wenn zu den 600 Mann noch 400 Mann hinzukommen?

Antwort. $\frac{600}{1000}\cdot 2$ Pfund $= 1\frac{1}{5}$ Pfund.

64.

Zusammengesetzte Verhältnisse. Eine Grösse kann von mehreren andern so abhängen, dass sie mit jeder derselben, einzeln genommen, im graden oder umgekehrten, und mit allen zugleich im zusammengesetzten Verhältniss steht.

Wenn z. E. 6 Mauerleute in 7 Tagen eine Mauer aufführen, welche 4 Stein dick, 3 Fuss hoch und 40 Fuss lang ist, und nun gefragt wird, wie viel Zeit 12 Mauerleute nach diesem als bekannt gegebenen Fall nöthig haben, um eine Mauer aufzuführen, welche 2 Stein dick, 9 Fuss hoch und 20 Fuss lang ist, so kann man diese leichte Aufgabe, so wie alle andern Aufgaben dieser Art, auf folgende Weise behandeln.

Man stelle, der leichtern Uebersicht wegen, den bekannten Fall erst so unter den unbekannten, dass gleichnamige Grössen über einander stehen, nämlich:

12 Mauerl.,	wie viel Zeit?	2 St. dick,	9 F. hoch,	20 F. lang	(unbek. Fall),
6 „	7 Tage,	4 „ „	3 „ „	40 „ „	(bek. Fall)

Hier steht nun die gesuchte Zeit in der obersten Reihe mit der Anzahl der Mauerleute im umgekehrten, mit jeder der übrigen Grössen aber im graden Verhältniss, denn je mehr Mauerleute, je weniger Zeit; je weniger dick, je weniger Zeit; je höher, je mehr Zeit &c.

Man untersuche nun erst, wie viel mal die Zeit grösser oder kleiner genommen werden muss, wenn bloss ein Umstand, z. B. die Anzahl der Arbeiter verschieden, die übrigen aber, wie Dicke, Höhe &c. vorläufig noch in beiden Fällen gleich wären. Wegen der vergrösserten Anzahl Arbeiter braucht man, die übrigen Umstände gleich gesetzt, nur $\frac{6}{12}$mal so viel Zeit; jetzt ziehe man noch einen andern veränderten Umstand, z. B. die Dicke, in Rechnung. Wegen verringerter Dicke allein ist nur $\frac{2}{4}$mal, also wegen beider veränderter Umstände nur $\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{4}$mal so viel Zeit nöthig. Wegen vergrösserter Höhe ist aber $\frac{9}{3}$mal so viel Zeit erforderlich; die vorhin wegen grösserer Anzahl Arbeiter und geringerer Dicke nur $\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{4}$mal zu nehmende Zeit muss also wieder $\frac{9}{3}$mal grösser, also $\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{9}{3}$mal genommen werden, weil aber endlich auch die Mauer

nicht so lang sein soll, so ist aus dieser Ursache die ebengefundene Zeit nur $\frac{20}{30}$mal erforderlich. Die gesuchte Zeit ist demnach

$$=\frac{8}{12}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{20}{30}\cdot 7 \text{ Tage} = 2\frac{5}{8} \text{ Tage}$$

Die ganze Rechnung kommt also immer auf eine blosse Multiplication mehrerer Brüche (Verhältnisse) mit einander zurück. Man muss nämlich die einzelnen Verhältnisse mit einander multipliciren und mit dem daraus gebildeten Producte, welches ein **zusammengesetztes Verhältniss** genannt wird, die Grösse multipliciren, deren Veränderung man sucht.

Aufgaben. 1) Wenn 6 Mann in 8 Tagen, täglich 9 Stunden gearbeitet, einen Graben von 120 Fuss Länge machen können, wie lang muss hiernach ein Graben werden, welchen (unter übrigens gleichen Umständen, d. h. bei gleicher Breite und Tiefe &c.) 4 Mann in 18 Tagen, täglich 10 Stunden, verfertigen?

Antwort. 200 Fuss.

4 M.	18 T.	10 St.	wie lang?	(alle Verhältnisse sind grade)
6 „	8 „	9 „	120 Fuss	

$\frac{4}{6}\cdot\frac{18}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot 120$ Fuss $= 200$ Fuss.

2) Wenn 6 Mann in 8 Tagen, täglich 9 Stunden arbeitend, einen Wall von 120 Fuss Länge aufführen, wie viel Tage brauchen dann 4 Mann, die täglich 10 Stunden arbeiten, um einen Wall von 200 Fuss Länge aufzuführen?

Antwort. 18 Tage.

4 M.	Tage?	10 St.	200 Fuss	(je weniger Mannschaft, je mehr Zeit; je mehr Stunden täglich, je weniger Zeit; je länger, je mehr Zeit.)
6 „	8 „	9 „	120 „	

$\frac{6}{4}\cdot 8\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{200}{120} = 18$ Tage

3) 1500 Mann können sich hinsichtlich des Proviants 30 Tage in einer Festung halten, wenn jedem Manne täglich 2 Pfund Brod gereicht wird. Nun kommen aber noch 500 Mann dazu, und die ganze Mannschaft soll sich auf 24 Tage halten, wie viel Brod kann jetzt jeder täglich empfangen?

Antwort. $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot 2$ Pfund $= 1\frac{7}{8}$ Pfund.

4) Wenn 40 Weber in 7 Wochen, wöchentlich 6 Tage und täglich 12 Stunden arbeitend, 200 Stück Leinwand, jedes Stück 70 Ellen lang und $1\frac{1}{4}$ Elle breit, verfertigen, wie viel Stück Leinwand werden, in gleichem Verhältniss, 60 Weber in 8 Wochen, wöchentlich 5 Tage und täglich 8 Stunden, verfertigen, wenn jedes Stück 50 Ellen lang und 1 Elle breit sein soll?

Antwort. $\frac{60}{40}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{70}{50}\cdot\frac{1\frac{1}{4}}{1}\cdot 200 = 333\frac{1}{3}$ Stück.

Achtes Buch.

Von den Verhältnisszahlen und deren Gebrauch.

65.

Bei manchen mathematischen Untersuchungen braucht man nicht die wirkliche Grösse der Dinge, welche der Rechnung unterworfen werden, sondern nur deren Verhältniss zu kennen, d. h. nur zu wissen, **wie viel** mal die eine Grösse grösser oder kleiner ist, als die andere. Dieses Grössen-Verhältniss kann also dadurch dargestellt werden, indem man statt der Grössen solche Zahlen setzt, welche, durch einander dividirt, denselben Quotienten geben, als die Grössen, worauf sie sich beziehen. Hat z. B. eine Person A 200 Thlr., eine andere Person B 600 Thlr. Vermögen, so kann man sagen, die Vermögensumstände der beiden Personen A und B verhalten sich, der Grösse nach, gerade so zu einander, wie die beiden Zahlen 2 und 6, oder wie, man es wohl auszudrücken pflegt, wie 2 : 6 (lies: wie 2 zu 6, das Kolon steht hier statt der Präposition **zu** und nicht als Divisionszeichen). Eben so kann man auch sagen, indem man die beiden Verhältnisszahlen 2 und 6 mit einer beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt, wie 1 : 3; wie $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$; wie 100 : 300 &c. &c., indem der Erklärung gemäss, je zwei dieser Verhältnisszahlen, durch einander dividirt, denselben Quotienten geben, als die beiden Grössen 200 Thlr. und 600 Thlr., worauf sie sich beziehen.

Verhalten sich z. B. die Einwohnerzahlen der vier Städte A, B, C, D, wie die Zahlen 3, 2, 6, 4, oder wie 3 : 2 : 6 : 4, so verhalten sie sich auch, indem man alle diese Verhältnisszahlen beliebige male kleiner oder grösser nimmt (durch 3, 2, 6, 4 dividirt),

	A,	B,	C,	D,
wie:	3 :	2 :	6 :	4
oder auch wie:	1 :	$\frac{2}{3}$:	2 :	$\frac{4}{3}$
wie:	$\frac{3}{2}$:	1 :	3 :	2
wie:	$\frac{1}{2}$:	$\frac{1}{3}$:	1 :	$\frac{2}{3}$
wie:	$\frac{3}{4}$:	$\frac{1}{2}$:	$\frac{3}{2}$:	1

z. B. die Einwohnerzahl von A verhält sich zu der von C, wie 3 : 6, oder 1 : 2, oder $\frac{3}{2}$: 3, $\frac{1}{2}$: 1 &c., und die von A verhält sich zu der von D, wie 3 : 4; 1 : $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$: $\frac{2}{3}$ &c.

66.

Aus den durch Zahlen dargestellten Verhältnissen mehrerer Grössen kann man (wozu auch eigentlich die Verhältnisszahlen dienen)

sogleich entscheiden, wie viel mal die eine Grösse grösser oder kleiner ist, als die andere, so sieht man z. B. aus der obigen ersten Reihe, dass B $\frac{2}{3}$mal, C 2mal, D $\frac{4}{3}$mal so viel Einwohner hat, als A; aus der dritten Reihe, dass A $\frac{3}{2}$mal, C 3mal, D 2mal so viel Einwohner hat, als B &c.

Wenn also die Verhältnisse mehrerer Grössen gegeben, und eine von den Grössen bekannt ist, so kann man die übrigen leicht berechnen, indem man, der deutlichen Uebersicht wegen, die Zahlen, welche die Verhältnisse darstellen, erst so einrichtet, dass diejenige, auf welche sich die bekannte Grösse bezieht, zur Einheit wird, und also zuvor alle Verhältnisszahlen durch diese dividirt (vergl. § 322).

Würde z. B. gesagt, die Bevölkerung der vier Städte A, B, C, D verhalten sich der Reihe nach, wie 3 : 2 : 6 : 4; A hat 6000 Einwohner, und, nach der Bevölkerung von B, C, D gefragt, so würde man so schliessen: da sich die Bevölkerungen von

A, B, C, D verhalten
wie: 3, 2, 6, 4, so verhalten sie sich auch (durch 3 dividirt)
wie: 1, $\frac{2}{3}$, 2, $\frac{4}{3}$,
folglich muss, da A 6000 = 6000 Einw. hat,
B $\frac{2}{3} \cdot 6000 =$ 4000 Einw.,
C $2 \cdot 6000 =$ 12000 Einw.,
D $\frac{4}{3} \cdot 6000 =$ 8000 Einw. haben.

Aufgaben. 1) Das Alter einer Person A verhält sich zu dem einer Person B wie 2 : 5, A ist 20 Jahre alt, wie alt ist B?

Antwort. $\frac{5}{2} . 20 = 50$ Jahre.

2) Die Bevölkerung der zum Bunde gehörigen Staaten Oldenburg, Bremen, Hannover, Hamburg, Lübeck verhalten sich ziemlich nahe, wie 55, 12, 325, 32, 10. Nach diesem Verhältniss müssen sie ihre Mannschaft zum Bundesheere stellen. Bremen stellt 480 Mann (nämlich den hundertsten Theil der Bevölkerung), wie viel die übrigen?

Antwort. Oldenburg 2200; Hannover 13000; Hamburg 1280; Lübeck 400.

67.

Oftmals drückt man die Verhältnisszahlen auch so aus, dass die kleinste von ihnen 100 wird, wenn man nämlich wissen will, um wie viel pro Cent die Grössen verschieden sind. Der Preuss. Thlr. verhält sich zum alten Hamb. Thlr. wie 5 : 6, oder mit $\frac{100}{5}$ multiplicirt, wie 100 : 120, d. h. der Hamb. Thlr. ist um 20% besser, als der Preuss., oder dieser um 20% schlechter, als jener. Die Brabanter Elle ist um 20% grösser, als die Schlesische, heisst so viel, als: 100 Brabanter Ellen = 120 Schlesische Ellen, oder die Brabanter Elle verhält sich zur Schlesischen, wie 120 : 100.

68.

Gebrauch der Verhältnisszahlen, um darnach eine Grösse in verhältnissmässige Theile zu theilen. Es genügt, sich einen Fall dieser Art recht klar gemacht zu haben.

Soll z. B. die Zahl 72 in drei solche Theile getheilt werden, welche sich der Grösse nach wie 2, 4, 6 verhalten, so findet man diese Theile, wenn man die zu theilende Grösse erst durch die Summe der Verhältnisszahlen dividirt und den Quotienten mit jeder Verhältnisszahl multiplicirt. Denn dividirt man 72 durch $2+4+6=12$, so erhält man den zwölften Theil von 72. Wird nun dieser zwölfte Theil 2mal, 4mal und 6mal genommen, so verhalten sich die Producte nicht allein wie die gegebenen Zahlen 2, 4, 6, sondern geben auch zusammen addirt, als Probe der richtigen Rechnung, alle zwölf Theile ($\frac{12}{12}$) der ganzen Grösse wieder. Der eine Theil ist also

$$=2\cdot\frac{72}{2+4+6}=2\cdot 6=12, = 2 \text{ Zwölftel von } 72$$

der 2te Theil $=4\cdot 6=24, = 4$ „ „ „

der 3te Theil $=6\cdot 6=36, = 6$ „ „ „

Probe-Summe $=72, =12$ Zwölftel von 72.

Aufgaben. 1) An eine für 1000 Thlr. verkaufte Concursmasse, von welcher, nachdem die Gerichte, die Advocaten, Curator massae &c. für die den Gläubigern geleisteten Dienste, den ihnen als privilegiati gebührenden Theil vorabgenommen hatten, — noch 100 Thlr. übrig blieben, hat sammt Zinsen und Kosten zu fordern: A 600 Thlr, B 50 Thlr., C 50 Thlr., D 300 Thlr.; wie viel wird jeder Gläubiger vom Reste erhalten, wenn derselbe nach dem Verhältniss der Forderungen vertheilt wird?

Antwort. A 60 Thlr., B 5 Thlr., C 5 Thlr., D 30 Thlr.

2) Vier Kaufleute unternehmen ein Handelsgeschäft, zu welchem A 200 Thlr., B 250 Thlr., C 400 Thlr, und D 350 Thlr. hergiebt. Nach beendigtem Geschäft findet sich ein Gewinn von 500 Thlr., wie viel wird jeder davon erhalten?

Antwort. A $83\frac{1}{3}$ Thlr., B $104\frac{1}{6}$ Thlr., C $166\frac{2}{3}$ Thlr. und D $145\frac{5}{6}$ Thlr.

Anmerkung. Dass (wenn weiter keine juridische Gründe, als Naturrecht und Billigkeit vorhanden sind) unter gleichbetheiligten Gläubigern eine Concursmasse nach den Verhältnissen der Forderungen; ein Gewinn oder Verlust bei einem Geschäft nach Verhältniss der Einlagen vertheilt werden müsse, ist leicht zu begreifen. So muss z. B. in der vorhergehenden 1sten Aufgabe A wegen der 12mal grösseren Forderung auch 12mal so viel haben als B; denn man kann sich statt A erst 12 andere Personen, jede mit 50 Thlr. Forderung, und diese dann auf eine einzige Person übertragen denken &c.

Bei der zweiten Aufgabe ist jedoch zu bemerken, dass, wenn die Einlagen nicht gleich lange stehen, wenn etwa nach Verlauf einer Zeit (ohne dass der Zustand des Geschäfts untersucht wird), Theilnehmer mit ihren Einlagen aus- oder eintreten, sich aber verbindlich machen, auch den bei Beendigung des Geschäfts sich ergebenden Verlust zu tragen, alsdann auch die Zeiten mit in Rechnung gezogen, und nach dem zusammengesetzten Verhältnisse der Einlagen und Zeiten getheilt werden muss. Die Richtigkeit dieses Schlusses ist folgendermaassen leichter zu begreifen:

Angenommen: drei Personen unternehmen ein Geschäft. A giebt dazu 6 Thlr. auf 2 Monate, B 12 Thlr. auf 4 M., C 18 Thlr. auf 6 M.; das Geschäft soll nach 6 Monaten beendigt sein und der Gewinn von 42 Thlr. gehörig vertheilt werden. Man urtheile so: Ob A 6 Thlr. auf 2 Monate, oder $2.6=12$ Thlr. auf 1 M. giebt, das ist vollkommen einerlei; denn man denke sich nur, A habe seine 6 Thlr. nach einem Monat zurückgenommen, gleich darauf aber wieder eingesetzt, was dann offenbar eben so viel ist, als wenn zwei andere Personen,

jede mit 6 Thlr. auf einen Monat nach einander oder auch zugleich, und also statt ihrer eine einzige Person A mit 12 Thlr. auf einen Monat eingetreten wäre. Ebenso ist es einerlei, ob B 12 Thlr. auf 4 M. oder 4.12 = 48 Thlr. auf 1 M., ob C 18 Thlr. auf 6 M. oder 6.18 = 108 Thlr. auf 1 M. giebt &c. Hierdurch ist also die Zeit bei allen auf die Einheit zurückgeführt, und die ausgesprochene Regel, dass man die Gewinne oder Verluste nach den Producten aus den Einlagen mit den Zeiten theilen muss, erklärt. Man hat also:

A	6	Thlr.	auf	2	Monate	=	12	Thlr.	auf 1 Monat
B	12	„	„	4	„	=	48	„	„ 1 „
C	18	„	„	6	„	=	108	„	„ 1 „

Summe der Verhältniss-Zahlen = 168.

Folglich erhält vom Gewinne:

A, $12 . \frac{42}{168} = 12 . \frac{1}{4} = 3$ Thlr.
B, $48 . \frac{1}{4} = 12$ „
C, $108 . \frac{1}{4} = 27$ „

Probe-Summe 42 Thlr.

Aufgabe. Zu einem Handel, in welchem 200 Thlr. verloren wurden, hat A 200 Thlr. auf 5 M., B 500 auf 2 M., C 300 auf 4 M., D 600 auf 3 M. hergegeben; wie viel muss jeder vom Verlust tragen?

Antwort. A, $1000 . \frac{1}{25} = 40$ Thlr.; B, 40 Thlr.; C, 48 Thlr.; D, 72 Thlr.

69.

Gebrauch der Verhältnisszahlen bei Mischungen; wo die Bestandtheile ein gegebenes Verhältniss zu einander haben müssen. Aufgaben dieser Art, welche in der practischen Chemie &c. vorkommen, gehören eigentlich ganz zu denen des vorhergehenden §. Ein einziges Beispiel wird zur Erläuterung genügen.

Aufgabe. Das gewöhnliche Schiesspulver ist eine Mischung aus Salpeter, Schwefel und Kohle, welche Bestandtheile sich dem Gewichte nach wie 16, 2, 3 verhalten (d. h. auf je 16 Gewichtstheile Salpeter müssen 2 solche Gewichtstheile Schwefel und 3 solche Gewichtstheile Kohle genommen werden); wie viel ist nun von jedem Bestandtheil zu 1470 Pfund Pulver erforderlich?

Auflösung. So oft 16 + 2 + 3 = 21 in 1470 enthalten ist, so oft muss jeder Bestandtheil genommen werden; folglich ist zu 1470 Pfund Pulver erforderlich:

70 . 16 = 1120 Pfund Salpeter,
70 . 2 = 140 Pfund Schwefel,
70 . 3 = 210 Pfund Kohle.

Probe-Summe 1470 Pfund Pulver.

Will man wissen, wie viel pro Cent eine Mischung von jedem ihrer Bestandtheile enthält, d. h. wie viel von jedem Bestandtheile in einer Mischung enthalten ist, welche man sich dem Gewichte (oder Maasse) nach in 100 gleiche Theile denkt, so muss man mit der Summe der Verhältnisszahlen in 100 dividiren und mit dem Quotienten jede multipliciren. Zu 100 Theilen Pulver ist z. B. erforderlich:

$\frac{100}{21} . 16 = 76\frac{4}{21}$ Theile oder $76\frac{4}{21}$ % Salpeter,
$\frac{100}{21} . 2 = 9\frac{11}{21}$ Theile Schwefel = $9\frac{11}{21}$ %,
$\frac{100}{21} . 3 = 14\frac{6}{21}$ Theile Kohlen = $14\frac{6}{21}$ %.

Summe 100 Theile Pulver.

Neuntes Buch.

Vergleichung der verschiedenen Münze, Maasse und Gewichte.

70.

Jeder Staat, und jeder Staat im Staate, hat seinen eigenthümlichen Spleen, und somit auch seine eigenthümlichen Münze, Maasse und Gewichte, die, selbst bei gleicher Benennung, an Grösse sehr verschieden sind. Deutschland allein kann über tausend verschiedene Maasse und Gewichte gleiches Namens aufweisen. So findet man z. E. das Fussmaass verschieden in den sehr nahe, neben, in und um einander gelegenen Orten: Hamburg, Harburg, Bremen, Oldenburg &c. Die grosse Verschiedenheit der Maass-Einheiten, und deren unsystematische, viele Tabellen und zeitraubende Rechnungen veranlassende Unterabtheilung, ist namentlich im eigenen Vaterlande höchst unangenehm, und macht den dringenden Wunsch fühlbar, dass wir in dieser Hinsicht doch bald unter Einen Hut und auf Einen Fuss kommen mögen. So lange aber die Staaten sich noch nicht vereinigt haben, zum allgemeinen Besten, ein bequemes, nach vernünftigen Grundsätzen bestimmtes Maasssystem einzuführen, so lange wird jene Babelsprache leider noch fortdauern, und Jedem, der nicht durch Schaden klug werden will, ihre Bekanntschaft nothwendig machen.

Die Wissenschaft hat sich unstreitig schon deshalb um das bürgerliche Leben ein nicht genug geachtetes Verdienst erworben, dass sie mit unsäglicher Mühe, durch oft wiederholte Messungen und Berechnungen, die Verhältnisse der verschiedenen Maass-Einheiten aller Länder und Oerter, soweit sie nur bekannt geworden, ausgemittelt und zum vorkommenden Gebrauch zum Verkehr mit fremden Staaten in eigene Tabellen (Maass- und Gewichts-Systeme) zusammengestellt hat.

71.

Mittelst solcher Tabellen ist es nun aber leicht, die Maass-Einheiten, welche an einem Orte gäng und gäbe sind, in die eines andern Ortes umzusetzen.

Will man z. B. wissen, wie viel Dresdener Fuss 25 Turiner Fuss sind, so suche man in einem Maass-System erst das Grössen-

Verhältniss dieser beiden Fussmaasse. Man findet, dass sich der Dresdener Fuss zum Turiner verhält, wie 1253 : 2277, d. h. wenn man sich den Dresdener Fuss in 1253 gleiche Theile denkt, so gehen 2277 solche Theile auf den Turiner Fuss; dividirt man beide Verhältnisszahlen durch die erste, so verhält sich auch der Dresdener Fuss zum Turiner, wie $1 : \frac{2277}{1253}$, d. h. der Turiner Fuss ist $\frac{2277}{1253}$mal (beinahe 2mal) so gross als der Dresdener. Folglich sind

$$25 \text{ Tur. Fuss} = 25 \cdot \frac{2277}{1253} = 45\frac{540}{1253} \text{ Dresd. Fuss.}$$

Aufgaben. 1) Wie viel betragen 10 Unzen Wiener Apothekergewicht nach Berner Apothekergewicht?

Auflösung. Da sich verhält, Wiener Unze : Berner Unze,
wie: 5760 : 4891,
oder wie: $\frac{5760}{4891} : 1$,
so sind 10 Wiener Unzen $= 11\frac{3799}{4891}$ Berner Unzen.

2) 200 Pariser Fuss, wie viel Cölner Fuss? 1275 Pariser Fuss = 1440 Cölner Fuss.

Antwort. $225\frac{15}{17}$.

3) Wie viel Portugiesische Fuss sind 100 Russische Fuss? Portugiesische Fuss : Russische Fuss, wie 969 : 2386.

Antwort. $246\frac{226}{969}$ Portugiesische Fuss.

72.

Obgleich die Werthe der verschiedenen Münzen vermöge des in ihnen enthaltenen reinen Metalls ein fest bestimmtes Verhältniss zu einander haben, so giebt es doch mehrere durch Staats- und Handelspolitik bestimmte Gründe, welche diese Verhältnisse wandelbar machen, und den Münzen auf eine kurze Zeit, je nachdem sie gerade sehr oder wenig gesucht werden, bald einen grösseren, bald einen kleineren Werth beilegen, als sie wirklich haben. So kann man z. B. für einen Louisd'or oftmals 1 bis 2 gGr. mehr erhalten, als zu einer andern Zeit. Diese Wandelbarkeit ist jedoch in enge Grenzen eingeschlossen; denn ständen die Münzen lange unter dem Werth des in ihnen enthaltenen reinen Metalls, so würde man sie einschmelzen, ständen sie aber weit über den Werth ihres innern Gehalts und der Prägekosten, so würde man sie nicht annehmen.

Hat man also Münzen eines Orts in die eines andern umzusetzen, so muss man sich jedesmal nach dem zeitigen, von der Politik bestimmten und öffentlich bekannt gemachten Cours (Verhältniss) richten. Hier können nun aber Fälle vorkommen, wo das Verhältniss einer Münzsorte zu dem einer andern, auf welche erstere reducirt werden soll, nicht geradezu, sondern durch Zwischenverhältnisse gegeben ist, aus welchem dann ersteres durch die sogenannte Kettenregel (wiederholte Regel de tri), leicht gefunden werden kann. Ein einziges Beispiel wird zur Erläuterung solcher leichten Reductionen genügen.

Kann man nämlich, vermittelst bekannter Verhältnisse, die Münzsorte eines Ortes, A, auf die eines zweiten Ortes, B, von B wieder auf C, von C auf D &c., reduciren, so kann man offenbar auch von dem ersten Orte A auf den letzten reduciren, indem man auch erst die Münzsorte des Ortes A in die des Ortes B umsetzt, den in B erhaltenen Betrag nach C, den in C erhaltenen Betrag wieder nach D umsetzt &c., bis man, an dieser Kette fortgehend, zum letzten Orte gekommen ist.

Aufgabe. Wie viel Francs in Paris sind 100 Thlr. Preuss. Cour. werth, wenn folgender Cours angenommen wird:

154 Thlr. Preuss. Cour. = 300 Mrk. Banco Hamb.
80 Mrk. Banco Hamb. = 71 fl. Holländ.
$88\frac{3}{4}$ fl. Holländ. = 188 Francs Paris.

Auflösung. Man setze die 100 Thlr. Preuss. erst in Hamb. Mrk. Bco. um, deute aber die deshalb vorzunehmende Multiplication und Division bloss an, um die Rechnungsvortheile benutzen zu können, welche später hinzutretende Factoren geben.

Da 154 Thlr. Preuss. = 300 Mrk. Bco.,
so sind: 100 Thlr. Preuss. = $100 \cdot \frac{300}{154}$ Mrk. Bco. (§ 62.)

Die für 100 Thlr. Preuss. erhaltenen $100 \cdot \frac{300}{154}$ Mrk. Bco. kann man nun in Holl. fl. umsetzen, weil:

80 Mrk. Bco. = 71 fl. Holl.
so sind: $100 \cdot \frac{300}{154}$ Mrk. Bco. = $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80}$ fl. Holl.

Um ferner die für 100 Thlr. Preuss. oder $100 \cdot \frac{300}{154}$ Mrk. Bco. erhaltenen $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80}$ fl. Holl. in Francs auszudrücken, hat man:

$88\frac{3}{4}$ fl. Holl. = 188 Francs.
mithin: $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80}$ fl. Holl. = $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80} \cdot \frac{188}{88\frac{3}{4}}$ Francs,

Man hat also:

100 Thlr. Preuss. = $100 \cdot \frac{300}{154}$ Mrk. Bco. = $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80}$ fl. = $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80} \cdot \frac{188}{88\frac{3}{4}}$ Frcs.,
oder: 100 Thlr. Preuss. = $100 \cdot \frac{300}{154} \cdot \frac{71}{80} \cdot \frac{188}{88\frac{3}{4}}$ Francs.

Diese Reduction würde ein Geübterer gleich aus dem oben aufgestellten Cours hingesetzt haben. Vollzieht man die angedeuteten Multiplicationen, indem man zuvor die gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner gegen einander aufhebt, so findet man:

100 Thlr. Preuss. Cour. = $366\frac{18}{77}$ Francs.

Anmerkung. Wer alle Tage solche Reductionen machen muss, der merke sich folgende mechanische Regel, deren Richtigkeit sich von selbst erklärt.

Kettenregel. Man stelle der leichtern Uebersicht wegen, und um sich zu überzeugen, dass die Kette der Reductionssätze keine Lücke hat, dieselben erst nach folgender Ordnung so unter einander, dass die Fragezahl, deren Umsatz oder Werth gesucht wird, rechts zu stehen kommt, dann jedes erste Glied der folgenden Sätze dem zweiten Gliede (wie es auch benannt sein möge) an Werth, dem zweiten Gliede des nächst vorhergehenden aber, an Benennung vollkommen gleich ist, nämlich so:

Wie viel Fr. = 100 Thlr. Pr.
wenn: Pr. Thlr. 154 = 300 Mark Bco.
Mark Bco. 80 = 71 fl. Holl.
fl. Holl. 88½ = 188 Fr.

und dividire alsdann das Product der rechts stehenden Zahlen durch das Product der links stehenden, indem man zuvor die etwa gemeinschaftlichen Factoren auf beiden Seiten gegen einander aufhebt.

Auch alle andere Aufgaben, welche auf den wiederholten Dreisatz führen, können nach der Kettenregel berechnet werden. Der Kettensatz ist offenbar ganz dasselbe. Uebrigens kommen solche weitläufige Reductionen, wie die vorstehende, in der Wirklichkeit selten vor.

73.

Sämmtliche in diesem ersten Theil erklärten Rechnungen pflegt der gemeine Mann wohl die kaufmännischen zu nennen, weil sie so oft im Handel und Wandel vorkommen. Allein jeder Mensch muss handeln und wandeln, und alle nach derselben Regel de tri, die uns Gerechtigkeit lehrt, wie Seume sagt. — Zuweilen wird aber der sonst leichte Sinn solcher alltäglichen Rechnungen durch fremde Wörter und Handwerksausdrücke verdunkelt, wie z. B. die Wörter brutto, thara, netto, conto, pari &c.

Von solchen und ähnlichen Sachen muss man aber die Erklärung nicht in einem Lehrbuch der Mathematik, sondern gehörigen Orts im Wörterbuch suchen. — Nur ein paar allgemein gebräuchliche Ausdrücke mögen hier noch erklärt werden:

Um Gold oder Silber zu wägen, wird allgemein die Cölnische Mark als Gewichts-Einheit gebraucht. Zum Wägen des Silbers ist die Mark in 16 Loth, und 1 Loth in 18 Grän, zum Wägen des Goldes aber 1 Mark in 24 Karat, und 1 Karat in 12 Grän eingetheilt. Gold und Silber heisst rein oder gediegen, wenn es keinen Zusatz von anderm Metall enthält. Mit Zusatz aber heisst es grob. Der Grad der Feinheit wird nach dem Gewicht angegeben, welches eine Mark grobes Silber oder Gold an reinem Metall enthält. So soll z. B. 10löthiges Silber so viel heissen: dass eine Mark von diesem Silber nur 10 Loth wirkliches Silber, die übrigen 6 Loth aber als Zusatz, z. B. von Kupfer enthält. Von 16-karätigem Golde befindet sich in einer Mark 16 Karat reines Gold und 8 Karat Zusatz. Hiernach versteht man auch, was 8-, 12-, 11-, 14-löthiges Silber, und 8-, 12-, 11-karätiges Gold heisst. Mit einem Menschen, der 18-löthiges Silber, oder 26-karätiges Gold feilbietet, muss man sich also nicht einlassen.

Zweiter Theil.

Allgemeine Arithmetik.

(Sogenannte Algebra.)

Par l'Algèbre on vient partout.

Zehntes Buch.

Von den einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

74.

Die meisten mathematischen Untersuchungen, auf welche Gegenstände sie auch Bezug haben mögen, führen in der Regel auf Probleme, deren vollständige Lösung die Hülfe der Arithmetik in Anspruch nimmt, oft eine umfassende Kenntniss derselben und einen gewissen Grad mechanischer Gewandtheit darin verlangt. Deshalb fordert auch, nicht allein rein wissenschaftliches, sondern schon practisches Bedürfniss, die arithmetische Wissenschaft noch viel weiter auszubilden, als der vorhergehende Theil sie enthält. Dieser erste Theil enthält eigentlich nur die Theorie des Zahlensystems, der darauf gegründeten sogenannten vier Species in ganzen und gebrochenen Zahlen, und der Regel de tri, als eine der einfachsten practischen Anwendungen dieser Theorien.

Im Grunde kommen freilich alle Rechnungen, wie verwickelt sie auch sein mögen, zuletzt doch auf die einfachen Operationen der vier Rechnungsarten zurück. Ehe man jedoch bei einer mathematischen Untersuchung die Sache bis zu diesem Ziele führen kann, müssen oftmals erst viele Folgerungen und Schlüsse gezogen und die vier einfachen Rechnungsarten auf mannigfache Weise mit einander verbunden und wiederholt werden. Aus diesem Grunde werden auch, um die Begriffe und Schlüsse leicht übersichtlich bezeichnen zu können, und um nicht in Weitläufigkeit zu gerathen, zweckmässig abkürzende Zeichen und Kunstwörter nothwendig. Vor Allem müssen wir, dem Entwickelungsgange der Arithmetik folgend, zuerst die sogenannten einfachen Gleichungen und deren Gebrauch zur Auflösung verwickelterer Aufgaben, als die, welche auf die

einfache Regel de tri führen, kennen lernen. Man merke sich deshalb die folgenden, zwar sehr leichten, aber sehr wichtigen Sätze.

75.

Wenn mehrere Grössen addirt, und von der Summe mehrere andere Grössen subtrahirt werden sollen, so kann man diese zu machenden Rechnungen kurz dadurch andeuten, dass man sämmtliche Grössen nach einander hinschreibt, vor jede der zu addirenden Grössen aber das + Zeichen, und vor jede zu subtrahirende Grösse das — Zeichen setzt.

Sollen z. E. die Zahlen 9 und 12 addirt, und von ihrer Summe die Zahlen 5, 3 und 2 subtrahirt werden, so kann man diese Forderung so andeuten:

$$+9+12-5-3-2$$

und dieser aus mehreren Theilen bestehende Grössenausdruck ist also nicht so zu verstehen, als ob 2 von 3 oder 3 von 5 subtrahirt werden soll, sondern dass die Summe aller mit dem — Zeichen behafteten Theile von der Summe der Theile, welche das + Zeichen führen, subtrahirt werden soll.

Dies wohl bemerkt, kann auch eine andere beliebige Folge der Theile eines mehrtheiligen Grössenausdrucks auf den Betrag desselben (insofern man ihn wirklich berechnen wollte) keinen Einfluss haben. Man schreibt indessen eine vieltheilige Grösse gewöhnlich so, dass ein Theil mit dem + Zeichen voransteht, indem man dann dieses voranstehende + Zeichen (als sich von selbst verstehend), der Einfachheit wegen, weglässt. Nur wenn ein Theil mit dem — Zeichen voransteht, darf dies Zeichen nicht fehlen. Vorstehenden Grössenausdruck kann man also, ohne seinen wirklichen Betrag (= 11) dadurch zu verändern, auch so schreiben:

$$\begin{aligned} 9+12-5-3-2 \\ 12+9-3-2-5 \\ 9-5+12-2-3 \\ -5+9-3+12-2 \end{aligned}$$

76.

In jedem vieltheiligen Grössenausdruck nennt man die Theile von verschiedenen Vorzeichen entgegengesetzte Grössen, und zwar die, welche mit dem + Zeichen behaftet sind, kurzweg *positive* (*directe*) und die, welche das — Zeichen führen, *negative* (*inverse*) Grössen. Ebenso heissen die Zeichen + und — entgegengesetzte Vorzeichen, und eins das umgekehrte des andern. Jedes Vorzeichen gehört immer zu dem Theil, vor dem es steht.

77.

Will man den Betrag einer vieltheiligen Grösse berechnen, so sind folgende Fälle zu berücksichtigen:

1) Alle Theile haben einerlei Vorzeichen (sind alle positiv oder alle negativ), alsdann addire man sie unmittelbar, und gebe der Summe dasselbe Vorzeichen. So ist z. B.:

$$6 + 4 + 3 = 13$$
$$-6 - 4 - 3 = -13.$$

2) Die Theile haben verschiedene Vorzeichen, alsdann suche man die Summe der positiven und ebenso die Summe der negativen, jede besonders, und tilge die kleinere Summe durch einen eben so grossen Theil der grösseren, d. h. man ziehe die kleinere Summe von der grösseren ab, und lasse dem Rest dasjenige Vorzeichen, welches die grössere Summe hat.

Einen solchen Rest (der den Umständen nach positiv oder negativ sein kann) nennt man den Betrag, oder auch wohl algebraische Summe der vieltheiligen Grösse.

Wären die Summen der positiven und negativen Theile an Grösse gleich, so ist in diesem Fall der Betrag der vieltheiligen Grösse $= 0$, denn das zwei zusammengehörige gleiche, aber entgegengesetzte Grössen sich tilgen, ist klar. So ist z. B.:

$$+5 - 5 = 0$$
$$-6 + 6 = 0$$
$$+8 - 5 = 3$$
$$-8 + 5 = -3$$
$$9 - 5 + 12 - 2 - 3 = 11$$
$$8 - 10 - 6 + 3 = -5.$$

78.

Zwei Grössenausdrücke von gleichem Betrage kann man in dieser Hinsicht einander gleich setzen, da z. B. $18 - 4$ eben so viel ist, als $6 + 3 + 5$, so schreibt man dies so:

$$18 - 4 = 6 + 3 + 5$$

und nennt eine so angedeutete Gleichheit, wie schon § 16 erklärt, eine Gleichung. Was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht, heisst die rechte, was linker Hand steht, die linke Seite, und die einzelnen Theile die Glieder dieser Seiten. So ist z. B. $+5$ das dritte Glied der rechten und -4 das zweite Glied der linken Seite.

79.

Wenn man von der einen Seite einer Gleichung ein oder auch mehrere Glieder mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite setzt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. So folgt z. B. aus der Gleichung:

$$18 - 4 = 6 + 3 + 5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

indem man das zweite Glied der linken Seite (-4) mit umgekehrtem Zeichen auf die rechte setzt, die folgende zweite Gleichung:

$$18 = 6 + 3 + 5 + 4 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses leichten, aber wichtigen Satzes folgt unmittelbar aus dem Satze: „Gleiches zu (von) Gleichem, giebt Gleiches" (§ 18). Auf beiden Seiten der Gleichung (1) ist der Betrag 14. Fügt man auf beiden Seiten $+4$ hinzu, so muss man offenbar wieder Gleiches erhalten; auf der linken Seite stände dann aber $18 - 4 + 4$ oder nur 18, weil hier zwei gleiche entgegengesetzte Grössen sich tilgen und weggelassen werden können ($-4 + 4 = 0$). Kurzum, indem man ein Glied von der einen Seite einer Gleichung mit umgekehrtem Zeichen auf die andere Seite setzt, geschieht ganz dasselbe, als wenn man dieses Glied zuvor mit umgekehrtem Zeichen auf beiden Seiten hinzugefügt hätte.

Setzen wir aus der zweiten Gleichung $18 = 6 + 3 + 5 + 4$ die beiden ersten Glieder der rechten Seite mit umgekehrtem Zeichen auf die linke, so kommt die nothwendig richtige Gleichung:

$$18 - 6 - 3 = 5 + 4 \ldots\ldots\ldots (3)$$

indem dadurch die Gleichung (2) ganz dieselbe Umformung erlitten, als wenn man auf beiden Seiten -6 und -3 hinzugefügt, und dann rechter Hand die sich tilgenden Grössen weggelassen hätte. Auf beiden Seiten ist der Betrag jetzt $= 9$.

Versetzen wir noch das erste Glied der linken Seite auf die andere, so folgt aus (3):

$$-6 - 3 = 5 + 4 - 18 \ldots\ldots\ldots (4)$$

hier ist der nach § 77 gehörig zusammengerechnete Betrag (algebr. Summe) auf beiden Seiten $= -9$.

Aus (4) folgt noch, indem man die beiden Glieder der linken Seite auf die rechte setzt:

$$0 = 5 + 4 - 18 + 6 + 3 \ldots\ldots (5)$$

Wenn man alle Vorzeichen in einer Gleichung umkehrt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung. So folgt z. B. aus:

$$18 - 4 = 6 + 3 + 5 \ldots\ldots\ldots (6)$$

indem man alle $+$ in $-$ und alle $-$ in $+$ verwandelt:

$$-18+4=-6-3-5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

denn in beiden Gleichungeu müssen die Beträge, sowohl der linken als der rechten Seite, an Grösse gleich, aber entgegengesetzt sein. In der sechsten Gleichung ist die (algebr.) Summe auf beiden Seiten $=14$, in der siebenten $=-14$. (§ 77.)

80.

Weil bei allen Umformungen einer Gleichung die Beträge auf beiden Seiten immer einander gleich bleiben müssen, so ist auch klar, dass wenn man eine Gleichung auf ein bestimmtes Glied reducirt (d. h. die Gleichung durch Versetzen der Glieder so umformt, dass dieses bestimmte Glied auf einer Seite ganz allein zu stehen kommt), dann auch der Betrag der andern Seite diesem alleinstehenden Gliede an Grösse und Vorzeichen vollkommen gleich sein muss.

Reduciren wir z. B. die Gleichung:

$$6+5-3=10-2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

auf das Glied $+5$, indem man die beiden damit verbundenen Glieder $+6$ und -3 auf die andere Seite setzt, so kommt:

$$5=10-2-6+3 \ldots\ldots\ldots (2)$$

und der Betrag der rechten Seite dieser Gleichung muss nothwendig $+5$ sein. (§ 79.)

81.

Wäre demnach in einer Gleichung, z. B. in der vorstehenden (1) ein Glied unbekannt, an dessen Stelle ein beliebiges Zeichen x, als Stellvertreter gesetzt, und nun verlangt: den Werth von x zu bestimmen, welcher der Gleichung:

$$6+x-3=10-2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Genüge leistet, d. h. eine Zahl anzugeben, welche statt x gesetzt (substituirt), die Bedingung der Gleichung erfüllt, vermöge welcher die Beträge auf beiden Seiten gleich sein müssen, so können wir diese unbekannte Grösse x sehr leicht finden, indem wir die Gleichung (1) auf x reduciren. Aus (1) folgt nämlich (§ 80):

$$x=10-2+3-6$$

oder zusammengezogen (§ 77):

$$x=5.$$

82.

Eine Gleichung auflösen heisst: den Werth einer in ihr enthaltenen unbekannten Grösse bestimmen, und dies geschieht

allemal dadurch, indem man sie auf die unbekannte Grösse reducirt. Die unbekannte Grösse kann nun aber auf verschiedene Weise mit bekannten verbunden sein, und diese verschiedenen Fälle müssen wir nun einzeln durchnehmen und durch leichte Beispiele erläutern, bevor wir die Anwendung der Gleichungen zur Auflösung algebraischer Aufgaben zeigen können.

53.

Erster Fall. Wenn die unbekannte Grösse nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, jedoch mit einem **Factor** (Coefficient) behaftet ist.

Alsdann reducire man die Gleichung erst auf das unbekannte Glied, ziehe dann die auf einerlei Seite stehenden bekannten Glieder in eins (algebr. Summe) zusammen, und dividire hierauf durch den Coefficienten (Factor) der unbekannten Grösse.

Angenommen, in der Gleichung $4 + 7 \cdot 8 = 60$ sei die Zahl 8 unbekannt, an deren Stelle das Zeichen x gesetzt und nun verlangt, den Werth von x zu finden, welcher der Gleichung

$$4 + 7x = 60$$

Genüge leistet.

So hat man zuerst:

$$7x = 60 - 4$$

oder zusammengezogen:

$$7x = 56$$

$$\text{folglich} \quad x = 8$$

denn wenn das Siebenfache einer unbekannten Grösse 56 ist ($7x = 56$), so ist offenbar die Grösse selbst $= \frac{56}{7} = 8$.

Anmerkung. Statt $7 \cdot x$ schreibt man kürzer $7x$, weil hier die Weglassung des von selbst verstandenen Multiplicationszeichens keinen Irrthum veranlassen kann.

Aufgabe. Wenn man von dem Sechsfachen einer gewissen Zahl 5 subtrahirt, so kommt 14. Was ist dies für eine Zahl?

Auflösung. Bezeichnen wir die fragliche unbekannte Zahl vorläufig mit x, also das Sechsfache mit $6x$, so können wir die Bedingung der Aufgabe durch folgende Gleichung:

$$6x - 5 = 14$$

ausdrücken, und aus dieser folgt nun:

$$6x = 14 + 5$$

$$6x = 19$$

$$x = 3\tfrac{1}{6}.$$

84.

Zweiter Fall. Wenn die unbekannte Grösse nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, aber mit einem Divisor behaftet ist. In diesem Fall reducire man die Gleichung wieder auf dieses unbekannte Glied, und multiplicire dann beiderseits mit dem Divisor.

Sei z. B. in der Gleichung $\frac{18}{6}+4=7$ die Zahl 18 unbekannt, dafür x gesetzt, und nun verlangt die Gleichung:

$$\frac{x}{6}+4=7$$

auf die unbekannte Grösse x zu reduciren, so hat man hieraus:

$$\frac{x}{6}=7-4$$

$$\frac{x}{6}=3$$

$$x=18$$

denn wenn der sechste Theil von einer Grösse 3 ist $\left(\frac{x}{6}=3\right)$, so muss die Grösse selbst offenbar $=6\cdot 3=18$ sein.

Aufgabe. Wenn man einen gewissen Bruch durch 5 dividirt, vom Quotienten $\frac{2}{3}$ subtrahirt, so kommt $\frac{3}{7}$. Welcher ist's?

Auflösung. Die in der Aufgabe in Worten ausgedrückten Bedingungen und zu machenden Rechnungen führen, wenn man dieses Alles vorläufig durch Zeichen andeutet, auf die Gleichung:

$$\frac{x}{5}-\frac{2}{3}=\frac{3}{7}$$

hieraus folgt: $\frac{x}{5}=\frac{3}{7}+\frac{2}{3}$

$$\frac{x}{5}=\frac{23}{21}$$

$$x=\frac{115}{21}$$

85.

Dritter Fall. Wenn die unbekannte Grösse nur in Einem Gliede vorkommt, aber mit einem Factor und Divisor zugleich behaftet ist. Alsdann reducire man die Gleichung erst auf das unbekannte Glied, und dividire den Betrag auf der andern Seite durch den Bruchcoefficienten, d. h. multiplicire mit dem Divisor und dividire durch den Factor (§ 47), so hat man x.

Sei z. B. in $6+\frac{4.10}{5}=14$ statt 10 das Zeichen x gesetzt und der Werth desselben aus der Gleichung:

$$6+\frac{4x}{5}=14$$

zu finden, so hat man hieraus:

$$\frac{4x}{5}=8$$

und folglich: $x=8\cdot\frac{5}{4}$
$x=10$

denn wenn $\frac{4}{5}$ von einer Grösse 8 ist ($\frac{4}{5}x=8$), so ist offenbar die Grösse selbst $=\frac{5}{4}\cdot 8=10$. Man kann aber auch so schliessen: Wenn der 5te Theil von 4x, 8 ist $\left(\frac{4x}{5}=8\right)$, so muss offenbar $4x=8\cdot 5$ und mithin $x=\frac{8\cdot 5}{4}$ sein.

Anmerkung. Ob man $\frac{4x}{5}$ oder $\frac{4}{5}x$ schreibt, das ist einerlei (§44).

Aufgabe. Es giebt eine gewisse Zahl: wenn man sie mit 7 multiplicirt, darauf das Product durch 9 dividirt, und zum Quotienten $\frac{2}{5}$ addirt, so kommt $\frac{6}{11}$. Welche ist es?

Auflösung. Uebersetzen wir die in Worten ausgedrückte Aufgabe in die algebr. Zeichensprache, so muss folgende Gleichung Statt finden:

$$\frac{7x}{9}+\frac{2}{5}=\frac{6}{11}$$

hieraus folgt: $\frac{7x}{9}=\frac{6}{11}-\frac{2}{5}$

$$\frac{7x}{9}=\frac{8}{55}$$

$$x=\frac{8}{55}\cdot\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{72}{385}$$

86.

Vierter Fall. Wenn die unbekannte Grösse in mehreren Gliedern einer Gleichung vorkommt.

Um in diesem Fall das Bekannte von dem Unbekannten zu trennen, bringe man erst alle unbekannten Glieder auf die eine (linke) und alle bekannten auf die andere (rechte) Seite,* ziehe

* Gewöhnlich stellt man die unbekannten Glieder auf die linke Seite, indem man, im Fall ihre algebr. Summe negativ ist, die Vorzeichen umkehrt. (§ 79.)

darauf die linke Seite in ein Glied zusammen und eben so die rechte, dann ist dieser Fall auf den dritten zurückgeführt.

Sei z. B. in der Gleichung $4+3\cdot5=49-4\cdot5-2\cdot5$ die Zahl 5 unbekannt, und die Aufgabe gegeben: den Werth von x zu finden, welcher folgender Gleichung:

$$4+3x=49-4x-2x$$

Genüge leistet, so folgt aus dieser Gleichung, indem man die beiden unbekannten Glieder der rechten Seite mit umgekehrtem Vorzeichen auf die linke Seite, und eben so das bekannte Glied der linken Seite auf die rechte setzt:

$$3x+4x+2x=49-4$$
$$9x=45$$
$$x=5$$

dass eine Grösse (x) 3mal und 4mal und 2mal genommen, eben so viel ist, als dieselbe 9mal genommen, ist klar.

Aufgabe. Was für eine Zahl ist es, die mit 10 multiplicirt, dasselbe Resultat giebt, als wenn man 10 zu ihr addirt?

Auflösung. Sei x die Zahl, so soll $10\cdot x$ eben so viel sein, als $x+10$, daher die Gleichung:

$$10x=x+10$$

hieraus folgt: $10x-x=10$

$$9x=10$$
$$x=1\tfrac{1}{9}.$$

87.

Fünfter Fall. Wenn die unbekannte Grösse mit bekannten verbunden in Klammern steht. In diesem Fall löst man erst die Klammern dadurch auf, indem man jeden innerhalb derselben stehenden Theil mit dem ausserhalb stehenden Factor multiplicirt (§ 19).

Setzt man in der Gleichung $6\cdot4=9+3\cdot5$, statt der eintheiligen Factoren 4 und 5 die zweitheiligen $7-3$ und $12-7$, welche dann aber (nach § 19) in Klammern gesetzt werden müssen, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$6(7-3)=9+3(12-7)$$

Angenommen nun, die in Klammern stehende Zahl 7 sei unbekannt, und die Frage vorgelegt: welcher Werth von x leistet folgender Gleichung:

$$6(x-3)=9+3(12-x)\ldots\ldots\ldots(1)$$

Genüge.

Um die unbekannte Grösse x von den Klammern zu befreien, lösen wir dieselben dadurch auf, indem man (nach § 19) jeden

innerhalb stehenden Theil mit dem ausserhalb stehenden Factor multiplicirt; so folgt aus vorstehender Gleichung zuerst:

$$6x - 18 = 9 + 36 - 3x \ldots\ldots\ldots (2)$$

und hieraus: $6x + 3x = 9 + 36 + 18$

$$9x = 63$$

$$x = 7$$

88.

Bei dieser Klammerauflösung muss man besonders noch auf den Fall achten, wo das mit einer Klammer behaftete Glied ein —Zeichen vor sich hat. In diesem Falle müssen nämlich die einzelnen Producte immer das umgekehrte Vorzeichen von den eingeklammerten Theilen erhalten.

Sei z. B. folgende Gleichung:

$$6(x - 3) - 3(12 - x) = 9 \ldots\ldots\ldots (3)$$

auf x zu reduciren, so folgt hieraus:

$$6x - 18 - 36 + 3x = 9 \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$6x + 3x = 9 + 18 + 36$$

$$9x = 63$$

$$x = 7$$

Um einzusehen, dass bei der Klammerauflösung der Gleichung (3) —3mal + 12 = — 36 und — 3mal — x = + 3 x sein muss, denke man sich das Glied — 3 (12 — x) erst mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite gesetzt (wie in Gleichung 1), dann die Klammer aufgelöst, was auf die Gleichung (2) führt, dann das rechter Hand aus + 3(12 — x) erhaltene Product 36 — 3x mit umgekehrtem Zeichen wieder auf die linke Seite gesetzt, was auf die Gleichung (4), also ganz auf dasselbe führt, als wenn man, um — 3(12 — x) in (3) von den Klammern zu befreien, nach der angegebenen Regel verfährt. Diese sich hier von selbst ergebende allgemeine Regel kann man auch so aussprechen: bei der Multiplication zweier Factoren geben allemal gleiche Zeichen *plus*, ungleiche Zeichen *minus*. (Vergl. Seite 96 und 97, Rand-Anmerkung.)

Aufgabe. Es giebt eine gewisse Zahl, wenn man 6 von ihr subtrahirt, den Rest mit 5 multiplicirt, und dieses Product wieder von 10 subtrahirt, so kommt Null. Wie findet man diese Zahl?

Auflösung. Deuten wir die gesuchte Zahl durch x an, so bezeichnet x — 6 den ersten Rest, und 5 (x — 6) die Multiplication desselben mit 5. Dass dieses Product wieder von 10 subtrahirt werden soll, ist durch 10 — 5 (x — 6) angedeutet, und da dieser Ausdruck = 0 sein soll, so hat man die Gleichung:

$$10 - 5(x - 6) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

hieraus:

$$10 - 5x + 30 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$-5x = -30 - 10 \ldots\ldots\ldots (3).$$

$$-5x = -40 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Vorzeichen umgekehrt (§ 79), kommt:

$$5x = 40$$

$$x = 8$$

Statt in (4) die Vorzeichen umzukehren, hätte man auch das unbekannte Glied in (2) auf die andere Seite bringen, oder auch mit —5 in —40 dividiren können, indem aus dieser Gleichung (4) sowohl, als auch aus der vorhin aufgestellten Multiplicationsregel ganz von selbst auch die gleichlautende allgemeine Divisionsregel für zwei Zahlen von beliebigem Vorzeichen folgt, nämlich: **gleiche Zeichen geben plus, ungleiche minus** $\left(\frac{-40}{-5} = +8\right)$ (§ 320).

89.

Schliesslich wollen wir noch den Fall betrachten, wenn die unbekannte Grösse in mehreren Gliedern mit einem Divisor (Nenner) behaftet ist. Sei in der Gleichung:

$$2 \cdot 24 + \frac{7 \cdot 24}{6} - 22 = 40 - \frac{2 \cdot 24}{3} + \frac{5 \cdot 24}{4}$$

der Factor 24 unbekannt, dafür x gesetzt und dieses x aus folgender Gleichung zu finden:

$$2x + \frac{7x}{6} - 22 = 40 - \frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} \ldots\ldots (1)$$

so hat man zuerst, nach Trennung des Bekannten vom Unbekannten (§ 86):

$$2x + \frac{7x}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} = 40 + 22 \ldots\ldots (2)$$

Jetzt die Coefficienten von x zusammengerechnet, indem man die Brüche $\frac{7}{6}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{4}$ auf einerlei Nenner bringt, so kommt: (da $2 + \frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{5}{4} = 2 + \frac{14}{12} + \frac{8}{12} - \frac{15}{12} = 2\frac{7}{12}$)

$$2\tfrac{7}{12}x = 62$$

$$\frac{31x}{12} = 62$$

$$x = 24$$

Statt aber, wie hier bei Gleichung (2) geschehen, die Bruchcoefficienten zu addiren, pflegt man gewöhnlich nur die bekannten Glieder in Eins zusammen zu ziehen, nämlich:

$$2x + \frac{7x}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} = 62 \ldots\ldots.(3)$$

und dann die Brüche dadurch fortzuschaffen, indem man die ganze Gleichung, d. h. auf beiden Seiten mit dem **kleinsten allgemeinen Nenner** multiplicirt, und dabei immer den § 23 gezeigten Rechnungsvortheil benutzt.

Multiplicirt man also obige Gleichung (3) mit 12, so müssen alle Nenner 6, 3, 4 wegfallen, weil sie in 12 ohne Rest enthalten sind. Es ist nämlich:

$$12 \cdot 2x + 12 \cdot \frac{7x}{6} + 12 \cdot \frac{2x}{3} - 12 \cdot \frac{5x}{4} = 62 \cdot 12$$

oder gleich kürzer: (NB. § 23.)

$$24x + 14x + 8x - 15x = 62 \cdot 12$$
$$31x = 62 \cdot 12$$
$$x = \frac{62 \cdot 12}{31}$$
$$x = 24$$

Aufgabe. Man sucht eine Zahl von der Beschaffenheit, dass wenn $\frac{2}{5}$ derselben von $\frac{3}{4}$ derselben subtrahirt wird, die Zahl 14 übrig bleibt?

Auflösung. Sei x die Zahl, so giebt die Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung:

$$\tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x = 14$$

hieraus (auf beiden Seiten mit 4·5 multiplicirt):

$$15x - 8x = 280$$
$$7x = 280$$
$$x = 40$$

Aufgabe. Man sucht eine Zahl von der Beschaffenheit, dass wenn man von dem Sechsfachen derselben 15 subtrahirt, den Rest mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt und das Product wieder von dem Achtfachen der gesuchten Zahl subtrahirt, die Zahl 12 übrig bleibt.

Auflösung. Die fragliche Zahl, wenn sie möglich ist, heisse x, so ist:

$$8x - \tfrac{4}{5}(6x - 15) = 12$$

hieraus (auf beiden Seiten mit 5 multiplicirt):

$$40x - 4(6x - 15) = 60$$
$$40x - 24x + 60 = 60$$
$$16x = 0$$
$$x = \tfrac{0}{16} = 0.$$

Elftes Buch.

Anwendung der Gleichungen. — Auflösung sogenannter algebraischer Aufgaben mit einer unbekannten Grösse.

90.

Die algebraischen Aufgaben sind so mannigfaltiger Art, dass sie sich nicht, wie die der speciellen Arithmetik, classificiren lassen. Nicht allein mit den bekannten, sondern auch mit der noch unbekannten Grösse, für welche man vorläufig irgend ein beliebiges Zeichen (gewöhnlich einen der letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, t &c.) als Stellvertreter setzt, müssen arithmetische Operationen vorgenommen werden, welche man jedoch bei letzterer, eben weil sie noch unbekannt ist, nur andeuten kann.

Allgemeine Auflösungs-Regeln lassen sich hier nicht geben. Man muss bei jeder besondern Aufgabe durch ruhiges Nachdenken und Ueberlegen den Sinn derselben aufzufassen, durch richtige Schlüsse, die in der Aufgabe durch Worte ausgedrückten Forderungen und Bedingungen, in die algebraische Zeichensprache übersetzen, in Gleichungen zu kleiden suchen, nämlich: die bekannten und unbekannten Grössen so mit einander verbinden oder zwei solche Zusammenfassungen treffen, dass man, der Bedingung der Aufgabe gemäss, die eine der andern als = gegenüber stellen kann.

Hat man erst die Gleichung zwischen den bekannten und unbekannten Grössen gefunden, so ist es leicht, daraus die unbekannte Grösse nach den Regeln des vorhergehenden Capitels zu finden. — Was aber die Auffindung der Gleichung anbelangt, so ist dieses Sache der reinen Vernunft und des Scharfsinns. Beides kann nicht gelehrt, durch fleissige Uebung aber entwickelt werden.

Hier, so wie überhaupt bei allen Anwendungen der Mathematik, ist der Mathematiker sich immer selbst überlassen. Selbst muss er auf die Bündigkeit seiner Schlüsse achten, und das Wahre vom Falschen unterscheiden. Für Anfänger, welche noch nicht an den Gebrauch ihrer eignen Kräfte, an Selbstdenken und Selbsterfinden gewöhnt sind, hat dies Anfangs grosse Schwierigkeit; doch muss man sich nicht gleich abschrecken lassen. Uebung und beharrlicher Fleiss geben im schnellen Auffassen, richtigen Urtheilen und Schliessen zuletzt eine gewisse Fertigkeit, welche den Gebrauch

der eigenen Kräfte nicht allein erleichtert, sondern auch bald zum Bedürfniss und Vergnügen macht. Uebrigens beherzige man ja, dass es in keiner Wissenschaft auf die Menge von Beispielen und unverdauten Begriffen ankommt. Eine einzige Aufgabe gehörig durchdacht, einen einzigen richtigen Schluss allein gemacht zu haben, hat weit mehr Nutzen, als tausend, die in derselben Zeit, aber durch Hülfe gemacht worden. Um zuerst auf den Weg zu helfen und zu zeigen, wie man die Sache angreifen muss, lassen wir hier einige rein algebraische Aufgaben mit beigefügten Auflösungen folgen. Der Anfänger wird wohl thun, sie zweimal durchzugehen, und zwar das zweite Mal ohne die gegebenen Auflösungen zu benutzen. Eigentlich besteht die ganze Mathematik aus Aufgaben. Die sogenannten algebraischen sind aber die leichtesten, weil sie keine Sachkenntniss, sondern bloss richtiges Urtheil und Scharfsinn fordern. Sie sind eigens für Anfänger gemacht und es ist durchaus erforderlich, sich einige Zeit allein darin zu üben. Wer gar keine algebraische Aufgabe lösen kann, wird alles Folgende schwer finden und keine rasche Fortschritte in der Mathematik machen.

91.

1. **Aufgabe.** Es giebt eine gewisse Zahl von der Beschaffenheit, dass das Zweifache und Dreifache derselben zusammenaddirt, ganz dasselbe giebt, als wenn man das Siebenfache der Zahl von 36 subtrahirt. Welche Zahl ist es?

Auflösung. Deutet man die zu findende Zahl vorläufig durch x an, mithin das Zweifache derselben durch 2x, das Dreifache durch 3x und das Siebenfache durch 7x, so bedeutet $2x+3x$ die Summe des Zweifachen und Dreifachen, und $36-7x$ die erwähnte Differenz. Nun muss, laut Bedingung der Aufgabe, die gesuchte Grösse x in den ersten Ausdruck $2x+3x$ substituirt, dasselbe geben, als wenn sie in den zweiten Ausdruck $36-7x$ substituirt wird, mithin muss folgende Gleichung Statt finden:

$$2x+3x=36-7x$$

hieraus: $$2x+3x+7x=36$$

$$12x=36$$

folglich: $$x=3$$

Als Probe der richtigen Rechnung muss die gefundene Zahl 3 in obige Gleichung, statt x substituirt, derselben Genüge leisten.

92.

2. **Aufgabe.** Es giebt eine Zahl, welche mit 10 multiplicirt, dasselbe giebt, als wenn man 3 zu ihr addirt, welche ist's?

Auflösung. Die Zahl heisse x, so giebt die Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung:

$$10x=x+3$$

$$10x-x=3$$

$$9x=3$$

und $$x=\tfrac{1}{3}$$

93.

3. Aufgabe. Drei Personen, A, B, C, sollen 36 Thlr. dergestalt unter sich theilen, dass B zweimal so viel als A, und C dreimal so viel als B erhält. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung. Sei x das, was A erhält, so erhält B 2x und C 6x, und da sie zusammen 36 Thlr. erhalten, so muss folgende Gleichung Statt finden:

$$x + 2x + 6x = 36$$
$$\text{oder: } 9x = 36$$
$$x = 4$$
$$\text{mithin erhält A, } x = 4$$
$$\text{B, } 2x = 8$$
$$\text{C, } 6x = 24$$
$$\text{Summe } 36$$

94.

4. Aufgabe. Vier Personen, A, B, C, D, sollen 100 Thlr. so unter sich theilen, dass die Theile sich wie die Zahlen 3, 5, 8, 4 verhalten. Wie viel bekommt jeder?

Auflösung. Was A erhält, heisse x, so muss, da sich die Theile wie 3, 5, 8, 4, oder was dasselbe ist, wie 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{4}{3}$ verhalten (§ 65), B $\frac{5}{3}$x, C $\frac{8}{3}$x und D $\frac{4}{3}$x erhalten, mithin ist:

$$x + \frac{5x}{3} + \frac{8}{3}x + \frac{4x}{3} = 100$$
$$\text{oder: } \frac{20x}{3} = 100$$
$$20x = 300$$
$$x = 15, \text{ für A}$$
$$\tfrac{5}{3}x = 25, \text{ „ B}$$
$$\tfrac{8}{3}x = 40, \text{ „ C}$$
$$\tfrac{4}{3}x = 20, \text{ „ D}$$

95.

5. Aufgabe. Ein Vermögen von 6000 Thlr. soll unter drei Personen, A, B, C, so vertheilt werden, dass B dreimal so viel als A, weniger 200 Thlr.; C aber viermal so viel als B, und ausserdem noch 200 Thlr. erhält; wie muss getheilt werden?

Auflösung. A erhalte x, so erhält B $3x - 200$ und C $4(3x - 200) + 200$; folglich laut Bedingung:

$$x + 3x - 200 + 4(3x - 200) + 200 = 6000$$
$$x + 3x + 12x - 800 = 6000$$
$$16x = 6800$$
$$\text{und } x = 425$$

Mithin muss A 425 Thlr., B 1075 Thlr. und C 4500 Thlr. erhalten.

96.

6. Aufgabe. Eine Griechin ging in den Tempel des Jupiter und bat um die Verdoppelung ihres Geldes. Jupiter that es, und sie opferte aus Dankbarkeit 2 Obolen. Mit dem Reste begab sie sich in den Tempel des Apollo, und bat um die Verdoppelung dieses Restes. Auch hier wurde ihre Bitte erhört und sie opferte aus Dankbarkeit 4 Obolen. Als die Griechin nun ihr Geld nachzählen wollte, fand sie, der Verdoppelung ungeachtet, alles weggegeben; wie viel hatte sie anfangs?

Auflösung. Ihr anfängliches Geld sei $=x$, so ist $2x$ das Doppelte und nachdem sie 2 davon geopfert hatte, blieb ihr noch $2x-2$. Dieser Rest wurde, durch Apollo verdoppelt, zu: $2(2x-2)$, hievon 4 geopfert, blieb ihr noch $2(2x-2)-4$, und da sie nun alles weggegeben haben soll, so muss sein:

$$2(2x-2)-4=0$$
$$4x-4-4=0$$
$$4x=8$$
$$\text{also: } x=2$$

97.

7. Aufgabe. Die Zahl 100 in zwei solche Theile zu theilen, dass, wenn man den grössten Theil durch 6 und den kleinsten durch 4 dividirt, in beiden Fällen gleiche Quotienten kommen. Welches sind die Theile?

Auflösung. Es scheinen hier zwei Zahlen unbekannt zu sein. Hat man aber die eine, so ergiebt sich die andere von selbst, indem man erstere von 100 abzieht. Bezeichnet man also die eine unbekannte Zahl, z. B. die grösste, vorläufig mit x, so kann man die andere, ohne dafür ein neues Zeichen nöthig zu haben, durch $100-x$ andeuten. Da nun x durch 6 dividirt, laut Bedingung der Aufgabe, eben so viel geben soll, als $100-x$ durch 4 dividirt, so hat man:

$$\frac{x}{6}=\frac{100-x}{4}$$

multiplicirt mit 12 kommt: $2x=3(100-x)$ (§ 89.)

$$2x=300-3x$$
$$5x=300$$
$$x=60$$

Mithin ist $x=60$ der eine, und $100-x=100-60=40$ der andere Theil.

98.

8. Aufgabe. Die Zahl 100 in zwei solche Theile zu theilen, dass, wenn der eine durch 5, der andere durch 3 dividirt und dann die Quotienten addirt werden, die Summe derselben 24 beträgt.

Auflösung. Sei x der eine und folglich $100-x$ der andere Theil, so soll, laut Bedingung der Aufgabe, sein:

$$\frac{x}{5}+\frac{100-x}{3}=24$$

multiplicirt mit 3.5 kommt: $3x+500-5x=360$

$$-2x=-140$$
$$x=70 \quad \text{(§ 79 u. 88.)}$$

folglich ist 70 der eine und $100-70=30$ der andere Theil.

99.

9. Aufgabe. Jemand wurde um sein Alter gefragt, und er antwortete, wenn ich so viele Jahre über 100 hinauskäme, als mir jetzt daran fehlen, so würde ich gerade mal so alt werden, als ich jetzt bin; wie alt ist er?

Auflösung. Sei x das jetzige Alter, so deutet $100-x$ die Jahre an, die noch an 100 fehlen; hätte er diese Jahre über 100, so würde er $100+(100-x)$ Jahre alt sein, und da nun dies das Doppelte vom gegenwärtigen Alter, nämlich $=2x$ sein soll, so hat man:

$$2x=100+100-x$$
$$3x=200$$
$$x=66\tfrac{2}{3}$$

100.

10. Aufgabe. Pythagoras wurde gefragt, wie viel Schüler er habe. Er antwortete auf folgende räthselhaft klingende Weise: die Hälfte studirt Philosophie, der dritte Theil Mathematik, die übrigen, welche sich noch im Stillschweigen üben, sammt den drei Schülern, welche ich eben jetzt angenommen (also vorhin nicht mitgerechnet) habe, machen den vierten Theil derjenigen Schüler, welche Philosophie und Mathematik studiren, wie viel Schüler waren anfangs da?

Auflösung. Die Anzahl heisse x, so studirt $\frac{x}{2}$ Philosophie und $\frac{x}{3}$ Mathematik; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x\left(=\frac{5x}{6}\right)$, von x, so bleiben noch $x-\frac{5}{6}x=\frac{x}{6}$, welche sich im Stillschweigen üben, und da nun diese sammt den 3 hinzugekommenen (nämlich $\frac{x}{6}+3$) den vierten Theil von denen, welche Philosophie und Mathematik studiren, machen sollen, nämlich $\frac{1}{4}$ von $\frac{5x}{6}$, so hat man:

$$\frac{x}{6}+3=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}x$$
$$\frac{x}{6}-\frac{5x}{24}=-3$$

multiplicirt mit 24 kommt: $4x-5x=-72$

mithin $x=72$

101.

11. Aufgabe. Ein Mauermann kann eine Mauer in 6 Tagen aufführen, ein anderer kann es in drei Tagen. In wie viel Zeit werden beide, zugleich arbeitend, damit fertig?

Auflösung. Der Mauermann, der in 6 Tagen die ganze Mauer aufführt, macht in einem Tage $\frac{1}{6}$ dieser Arbeit, und ebenso der andere in einem Tage $\frac{1}{3}$, also beide zusammen in einem Tage $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{9}{18}$ dieser Arbeit; heisst also x die Zeit, welche beide zur Vollendung der ganzen Arbeit ($=1$) gebrauchen, so muss sein:

$$\frac{9}{18}x=1$$
$$x=2$$

102.

12. Aufgabe. Eine Wasserhebemaschine kann ein Land in 30 Tagen entwässern, eine andere kann dies in 40 Tagen, eine dritte braucht nur 20 Tage, Wie viel Zeit ist erforderlich, wenn alle drei zugleich arbeiten?

Auflösung. Man setze die Menge des Wassers $= 1$; da nun die erste Maschine dies in 30 Tagen hebt, so hebt sie an einem Tage $\frac{1}{30}$ desselben, ebenso die zweite $\frac{1}{40}$, die dritte $\frac{1}{20}$; alle drei heben also in einem Tage $\frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{20} = \frac{13}{120}$ und in x Tagen $\frac{13}{120} . x$, folglich:

$$\frac{13x}{120} = 1$$

$$x = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$$

103.

13. Aufgabe. Ein Vater wollte seinen Kindern Aepfel schenken. Um jedem 5 Stück geben zu können, hätte er 2 Stück mehr haben müssen; er gab darauf jedem 4 Stück und behielt noch 3 Stück übrig. Wie viel Kinder und wie viel Aepfel waren da?

Auflsöung. Die Aufgabe scheint zwei unbekannte Grössen zu enthalten, die eine ist aber schon durch die andere gegeben. Sei nämlich die Anzahl der Kinder $= x$. Soll jedes 5 Aepfel haben, so fehlen 2, mithin stellt der Ausdruck: $5x - 2$ die Anzahl der Aepfel dar; bekommt jedes Kind 4 Aepfel, so bleiben 3 übrig, folglich stellt auch der Ausdruck $4x + 3$ die Anzahl der Aepfel dar, und man hat also:

$$5x - 2 = 4x + 3$$

$$\text{hieraus: } x = 5$$

Es waren also 5 Kinder, und $5 . 5 - 2 = 4 . 5 + 3 = 23$ Aepfel da.

104.

14. Aufgabe. In einer Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal so viel Männer als Frauen, später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggegangen waren, blieben noch fünfmal so viel Männer als Frauen zurück. Wie viel Männer und Frauen waren anfangs da?

Auflösung. Man setze die anfängliche Zahl der Frauen $= x$ und mithin die der Männer $= 3x$. Nachdem 8 Männer und 8 Frauen weggegangen waren, blieben noch $x - 8$ Frauen und $3x - 8$ Männer zurück, und da die Anzahl der Männer jetzt fünfmal so gross sein soll, so hat man:

$$3x - 8 = 5(x - 8)$$

$$\text{woraus: } -2x = -32$$

$$\text{und: } x = 16$$

Mithin waren anfänglich 16 Frauen und $3 . 16 = 48$ Männer da.

105.

15. Aufgabe. Ein Bedienter, welcher zum jährlichen Lohn 45 Thlr. und ein Kleid erhielt, forderte nach 7 Monaten seinen Abschied und bekam für diese Zeit ausser dem Kleide noch 22 Thlr. 10 Sgr. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?

Auflösung. Setze den Werth des Kleides in Thlr. ausgedrückt $= x$, so beträgt der ganze jährliche Lohn $45 + x$, mithin der Lohn für 1 Monat $\frac{45 + x}{12}$ und für 7 Monate $= \frac{7}{12}(45 + x)$, dies muss so viel betragen als 22 Thlr. 10 Sgr. und x, der Werth des Kleides. Mithin ist:

$$22\frac{1}{3} + x = \frac{7}{12}(45 + x)$$

$$268 + 12x = 315 + 7x$$

$$5x = 47$$

$$x = 9\frac{2}{5}$$

NB. Die Glieder in einer Gleichung müssen alle *einnamig* und *gleichnamig* sein.

106.

16. Aufgabe. „Ein Meister nimmt einen Gesellen an, und verspricht ihm jeden Tag, den er bei ihm arbeitet, 10 Sgr. Arbeitet er aber nicht, so muss er dem Meister 6 Sgr. für die Kost zahlen. Nach 80 Tagen halten sie Abrechnung und es findet sich, dass keiner dem andern etwas schuldig ist. Wie viel Tage hat der Geselle gearbeitet?

Auflösung. Seien x die Tage, wo er gearbeitet, und mithin $80-x$ die Tage, wo er nicht gearbeitet hat, alsdann beträgt sein Lohn $10x$ und das Kostgeld $6(80-x)$, und da nun der Lohn aufgezehrt sein soll, so hat man:

$$10x-6(80-x)=0$$
$$10x-480+6x=0$$
$$16x=480$$
$$x=30$$

107.

17. Aufgabe. Ein Kaufmann fordert für 40 Ellen Tuch 100 Thlr.; Käufer dingt aber von diesen 100 Thlr. so viel ab, als ihm hernach 6 Ellen wirklich kosten: wie viel wurde abgedungen?

Auflösung. Man setze den Abzug $=x$, so kosten die 40 Ellen $100-x$ mithin 1 Elle $\frac{100-x}{40}$, also 6 Ellen $\frac{6(100-x)}{40}$, und da dies dem Abzuge x gleich sein soll, so hat man:

$$x=\frac{6(100-x)}{40}$$
$$40x=600-6x$$
$$46x=600$$
$$x=13\tfrac{1}{23}$$

108.

18. Aufgabe. Man sucht eine Zahl von folgender Beschaffenheit: wenn man sie mit 3 multiplicirt, vom Product 11 subtrahirt und hierauf den Rest wieder mit 4 multiplicirt und zum Producte 6 addirt und die erhaltene Summe nochmals mit 5 multiplicirt, so soll 50 kommen.

Auflösung. Um hier die Bedingungen der Aufgabe ganz in Zeichen andeuten zu können, werden zwei Klammern nothwendig. Heisst nämlich x die gesuchte Zahl, so deutet $3x-11$ den zuerst erwähnten Rest und $4(3x-11)+6$ die erwähnte Summe an. Um nun anzudeuten, dass diese Summe noch mit 5 multiplicirt werden soll, brauchen wir noch eine zweite Klammer, welche sich, um Irrthum zu verhüten, von der ersten unterscheiden muss, daher:

$$5[4(3x-11)+6]=50$$

Um die unbekannte Grösse von den Klammern zu befreien, kann man erst die innern und dann die äussern Klammern auflösen (oder auch umgekehrt). Lösen wir erst die innern Klammern, so hat man:

$$5[12x-44+6]=50$$
$$5[12x-38]=50$$
$$60x-190=50$$
$$60x=240$$
$$x=4$$

109.

19. Aufgabe. Eine Frau bringt Aepfel zu Markt und verkauft zuerst die Hälfte und einen halben. Von dem Reste verkauft sie wieder die Hälfte und einen halben: von dem jetzt noch bleibenden Reste wiederum die Hälfte und einen halben; worauf sie noch 24 Stück übrig behält. Wie viel hatte sie anfangs?

Auflösung. Sie habe x gehabt, so bleiben hiervon übrig nach dem ersten Handel, die Hälfte weniger einen halben, nämlich: $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; von diesem Reste bleibt nach dem zweiten Verkauf wiederum die Hälfte $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})$ weniger einen halben, nämlich: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$: hiervon nach dem dritten Verkauf wiederum die Hälfte weniger einen halben, nämlich $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}]-\frac{1}{2}$, und da sie jetzt noch 24 Stück übrig behalten soll, so hat man:

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}]-\frac{1}{2}=24$$

Die innern Klammern aufgelöst, kommt:

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}]-\frac{1}{2}=24$$

$$\text{oder: } \frac{1}{2}[\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}]-\frac{1}{2}=24$$

$$\text{ferner: } \frac{x}{8}-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}=24$$

$$\frac{x}{8}=24\frac{7}{8}$$

$$x=199$$

110.

20. Aufgabe. Wie gross muss das Capital sein, welches zu 5% belegt, in 4 Jahren eben so viel Zinsen bringt, als das Capital von 635 Thlr. zu 4% in 7 Jahren?

Auflösung. So oft 100 Thlr. in 635 Thlr. enthalten sind, erhält man 4 Thlr. Zinsen: der Ausdruck $\frac{635}{100}.4$ stellt also die einjährigen, und der Ausdruck $\frac{635}{100}.4.7$ die siebenjährigen Zinsen des bekannten Capitals dar. Heisst also das gesuchte Capital x, so stellt gleicherweise $\frac{x}{100}.5$ die einjährigen, und mithin $\frac{x}{100}.5.4$ die vierjährigen Zinsen des unbekannten Capitals x dar. Man hat also laut Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{100}.5.4=\frac{635}{100}.4.7$$

$$x=889.$$

111.

21. Aufgabe. Zu wie viel pro Cent muss das Capital von 225 Thlr. belegt werden, um in 6 Jahren eben so viel Zinsen zu bringen, als 300 Thlr. zu $3\frac{1}{2}$% in 8 Jahren?

Auflösung. Heissen x die gesuchten Procente, so hat man laut Bedingung:

$$\frac{225}{100}.x.6=\frac{300}{100}.\frac{7}{2}.8$$

$$45x=10.7.4$$

$$9x=56$$

$$x=6\frac{2}{9}\,\%.$$

112.

22. Aufgabe. Wie gross muss das Capital sein, welches mit seinen 4jährigen Zinsen zu 4% auf 600 Thlr. anwächst?

Auflösung. Heisse x das gesuchte Capital. So oft 100 in x enthalten ist, erhält man 4%, der Ausdruck $\frac{x}{100}.4.5$ stellt also die 5jährigen Zinsen, und der Ausdruck $x+\frac{x}{100}.4.5$ Capital sammt den 5jährigen Zinsen dar. Man hat also laut Bedingung:

$$x+\frac{x}{100}4.5=600$$
$$5x+x=3000$$
$$x=500$$

113.

23. Aufgabe. Eine Person, A, hat für eine andere Person, B, 5100 Thlr. eincassirt, B wünscht dies Geld frei mit der Post zu erhalten. Wie viel wird B bekommen, wenn A 2% Postgeld bezahlen muss?

Auflösung. Das, was A auf die Post giebt, heisse x, so beträgt das dafür bezahlte Postgeld $\frac{x}{100}.2$, weil nun A die 5100 Thlr. hiemit ausgegeben, nichts davon behalten haben soll, so hat man:

$$x+\frac{x}{100}.2=5100$$
$$51x=5100.50$$
$$x=5000$$

114.

24. Aufgabe. A muss 4900 Thlr. postfrei an B senden, das Postgeld beträgt 2%, kann aber am Orte der Absendung nicht entrichtet werden. Wie viel muss also A sammt dem beigelegten Postgeld auf die Post geben, damit B nach Bezahlung desselben, seine 4900 Thlr. übrig behält?

Auflösung. Man nenne x die fragliche Versendung, so muss B dafür bezahlen $\frac{x}{100}.2$, daher:

$$x-\frac{x}{100}.2=4900$$
$$49x=4900.50$$
$$x=5000$$

115.

25. Aufgabe. Jemand will 30000 Thlr. so versichern lassen, dass die Prämie, welche 20% beträgt, gleich mit versichert ist, wie viel beträgt die Prämie?

Auflösung. Nennt man dieselbe x, so wird im Ganzen 30000 + x versichert, welches $\frac{30000+x}{100}.20$ kostet. Da nun die zu zahlende Prämie x = den Procenten für versichertes Capital und Prämie sein soll, so hat man:

$$x=\frac{30000+x}{100}.20$$
$$4x=30000$$
$$x=7500$$

116.

26. Aufgabe. Einem Courier, der täglich 5 Meilen macht, wird nach 8 Tagen ein anderer, der täglich 9 Meilen macht, nachgeschickt. In wie viel Tagen wird letzterer den erstern einholen?

Auflösung. Man setze, in x Tagen, so macht der zweite einen Weg von 9x Meilen und der erste, welcher 8 Tage voraus hat, einen Weg von 5 (8+x) Meilen. Auf dem Punct des Zusammentreffens müssen beide von Haus aus einen gleichen Weg zurückgelegt haben, daher:

$$9x = 5(8+x)$$
$$9x = 40 + 5x$$
$$x = 10$$

117.

27. Aufgabe. Der Stundenzeiger einer Uhr steht auf VI, der Minutenzeiger auf XII. In wie viel Zeit werden beide Zeiger sich decken?

Auflösung. Man setze die fragliche Zeit in Stunden ausgedrückt = x. Der Minutenzeiger macht in jeder Stunde 60 Striche, also in x Stunden 60 x Striche, der Stundenzeiger legt hingegen in jeder Stunde nur 5 Striche zurück, mithin in x Stunden 5x; wo beide Zeiger sich decken, da müssen sie gleichviel Striche von XII abstehen. Da nun der Stundenzeiger auf VI steht und mithin 6.5 = 30 Striche voraus hat, so erhält man die Gleichung:

$$60x = 30 + 5x$$
$$x = \tfrac{6}{11} \text{ Stunden} = 32\tfrac{8}{11} \text{ Minuten.}$$

118.

28. Aufgabe. Jemand, der um die Zeit gefragt wurde, antwortete: Stunden- und Minutenzeiger decken sich eben zwischen X und XI; wie spät war es?

Auflösung. Der Minutenzeiger stand gerade auf XII, als der Stundenzeiger auf X stand und mithin 10.5 = 50 Striche voraus hatte, daher:

$$60x = 50 + 5x$$
$$x = \tfrac{10}{11}$$

Es war also $\tfrac{10}{11}$ auf XI d. i. $5\tfrac{5}{11}$ Minuten vor XI.

119.

29. Aufgabe. Ein Hase wird von einem Hunde verfolgt. Der Hase hat 100 Sprünge voraus und macht jedesmal 6, wenn der Hund 5 macht. Dagegen reicht aber der Hund mit 7 Sprüngen eben so weit, als der Hase mit 9. Wie viel Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe der Hund ihn einholt?

Auflösung. Man setze x, so beträgt der ganze Weg, den der Hase zurückgelegt 100 + x Hasensprünge. Da der Hase 6 Sprünge macht, während der Hund 5 thut, so macht der Hase jedesmal 1 Sprung, wenn der Hund $\tfrac{5}{6}$ Sprung macht. Während also der Hase noch x Sprünge macht, macht der Hund nur $\tfrac{5}{6}$ so viel Sprünge, also $\tfrac{5x}{6}$, womit er den Weg von 100 + x Hasensprüngen zurücklegen muss. Um beide Ausdrücke einander gleichsetzen zu können, müssen die $\tfrac{5x}{6}$ Hundesprünge auf Hasensprünge reducirt werden. Da nun an Grösse 7 Hundesprünge = 9 Hasensprünge, so ist 1 Hundesprung = $\tfrac{9}{7}$ Hasensprünge, mithin $\tfrac{5x}{6}$ Hundesprünge = $\tfrac{9}{7} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot x$ Hasensprünge, daher:

$$\tfrac{9}{7} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot x = 100 + x$$
$$15x = 1400 + 14x$$
$$x = 1400$$

120.

30. Aufgabe. Jemand hat zweierlei Sorten Wein. Von der ersten kostet die Maass 12 gGr.; von der zweiten 7 gGr. Da nun die erste Sorte wegen zu geringer Güte keine Abnehmer findet, so will er aus beiden eine 200 Maass haltende Mischung machen, von welcher, ohne Schaden zu leiden, die Maass nur 9 gGr. kostet. Wie viel muss von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung. Die ganze Mischung soll 200 Maass halten; nimmt man also von der bessern Sorte x Maass, so müssen die übrigen Maasse, nämlich $200-x$ von der schlechtern genommen werden. Jedes der x Maasse kostet 12 gGr. und jedes der $(200-x)$ Maasse kostet 7, der in der Mischung steckende Werth ist also $12x+7(200-x)$. Da nun jede Maass der Mischung für 9 gGr. verkauft werden soll, so erhält man für die ganze, 200 Maass haltende Mischung $9.200=1800$ gGr. Mithin muss der Werth von x folgender Gleichung Genüge leisten:

$$12x+7(200-x)=1800$$
$$\text{woraus: } x=80$$

Es müssen also 80 Maass von der ersten und $200-80=120$ Maass von der zweiten Sorte genommen werden.

121.

31. Aufgabe. Wie viel Mark 8löthiges Silber muss zu $6\frac{2}{3}$ Mark 14löthigem gesetzt werden, damit der Gehalt 12löthig wird? (Siehe § 73, 1.)

Auflösung. Sei der Zusatz von 8löthigem Silber x Mark. Jede dieser x Mark enthält 8 Loth und jede der $6\frac{2}{3}$ Mark 14 Loth Silber, die ganze Mischung enthält an Gewicht $6\frac{2}{3}+x$ Mark und an Silber $14.6\frac{2}{3}+8x$ Loth und da nun die Mischung im Durchschnitt 12löthig sein soll, so enthält sie an Silber $12(6\frac{2}{3}+x)$ Loth. Mithin:

$$12(6\tfrac{2}{3}+x)=14.6\tfrac{2}{3}+8x$$
$$\text{hieraus: } x=3\tfrac{1}{3}$$

122.

32. Aufgabe. Jemand hat 30 Mark 14löthiges Silber; wie viel Kupfer muss er zusetzen, damit der Gehalt 10löthig wird?

Auflösung. Man setze x Mark Kupfer, so hat man:

$$10(30+x)=14.30$$
$$x=12$$

123.

33. Aufgabe. Ein Stück Blei, welches in freier Luft 23 Pfund wiegt, wiegt nur 21 Pfund, wenn es im Wasser gewogen wird, oder so ausgesprochen: 23 Pfund Blei verlieren im Wasser 2 Pfund, und so in diesem Verhältniss, nämlich 2.23 Pfund Blei verlieren im Wasser $2.2=4$ Pfund &c. Ebenso verlieren 37 Pfund Zinn im Wasser 5 Pfund. Schmelzt man 23 Pfund Blei und 37 Pfund Zinn zusammen, so wiegt die Composition 60 Pfund und wird im Wasser $2+5=7$ Pfund verlieren. Wie lässt sich nach dieser Angabe berechnen, wie viel Zinn in einer Composition von 217 Pfund enthalten ist, wenn bloss gesagt wird, dass die Composition nur aus Zinn und Blei besteht und im Wasser gewogen 26 Pfund verliert?

Auflösung. Seien in der 217 Pfund wiegenden Composition x Pfund Zinn und folglich $(217-x)$ Pfund Blei enthalten.

So oft 37 in x enthalten, so oft muss das in der Composition enthaltene Zinn 5 Pfund verlieren. so oft 23 in 217 — x enthalten ist, so oft muss auf das Blei ein Verlust von 2 Pfund gerechnet werden. Der ganze Verlust muss also: $\frac{x}{37} . 5 + \frac{217-x}{23} . 2$ sein, und da dieser Verlust $= 26$ gegeben ist, so hat man:

$$\frac{x}{37} . 5 + 2 \frac{(217-x)}{23} = 26$$

$$\text{hieraus: } 115x + 74 . 217 - 74x = 23 . 26 . 37$$

$$41x = 6068$$

$$x = 148$$

Die Composition enthält also: 148 Pfund Zinn und 69 Pfund Blei.

124.

34. Aufgabe. Der König Hiero von Syrakus gab einem Goldschmied 16 Pfund Gold und 4 Pfund Silber, um ihm daraus eine Krone zu machen. Die fertige Krone wog richtig 20 Pfund. Der König aber argwohnte, dass der Goldschmied einen Theil des Goldes für sich behalten und dieses wieder durch ein gleiches Gewicht an Silber ersetzt habe. Er bat deshalb den Mathematiker Archimedes die Sache zu untersuchen.

Archimedes wog die Krone im Wasser, worin sie $1\frac{1}{4}$ Pfund verlor ausserdem fand er, dass 21 Pfund Silber im Wasser 2 Pfund und 20 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund verliert, und konnte hieraus den etwaigen Betrug leicht berechnen. Er fand ihn — wie gross?

Auflösung. Die Krone enthalte x Pfund Gold, mithin $(20 - x)$ Pfund Silber, so muss der ganze Verlust im Wasser $= \frac{x}{20} . 1 + \frac{20-x}{21} . 2$ sein, da nun dieser Verlust $= 1\frac{1}{4}$ Pfund bekannt ist, so hat man:

$$\frac{x}{20} + 2 . \frac{(20-x)}{21} = \frac{5}{4}$$

$$\text{hieraus: } x = 14\tfrac{9}{19}$$

Die Krone enthielt statt 16 Pfund nur $14\frac{9}{19}$ Pfund Gold, und statt 4 Pfund Silber: $5\frac{10}{19}$ Pfund Silber.

125.

35. Aufgabe. Ein Mann ist 58, sein Sohn 18 Jahre alt. Nach wie viel Jahren wird der Vater mal so alt sein als sein Sohn?

Auflösung. Seien x die Anzahl Jahre, welche noch verfliessen oder zu beider Alter hinzukommen müssen, um den fraglichen Zustand zu erhalten, so ist alsdann des Vaters Alter $58 + x$, und des Sohnes Alter $18 + x$, und da dann der Vater mal so alt sein soll, so hat man:

$$2(18 + x) = 58 + x$$

$$36 + 2x = 58 + x$$

$$x = 22$$

Der fragliche Zustand tritt also nach 22 Jahren ein, und der Vater ist dann $58 + 22 = 80$, und der Sohn $18 + 22 = 40$.

126.

36. Aufgabe. Ein Mann ist 58, sein Sohn 18 Jahre alt; wie viel Jahre müssen noch verfliessen oder zu beider Alter hinzukommen, um den Zustand zu erhalten, wo der Vater gerade $3\frac{1}{2}$mal so alt ist, als sein Sohn?

Auflösung. Seien x die fraglichen Jahre, so ist alsdann des Vaters Alter $58+x$ und des Sohnes Alter $18+x$, und da dann der Vater $3\frac{1}{2}$mal so alt sein soll, so hat man:

$$3\tfrac{1}{2}(18+x)=58+x$$
$$63+3\tfrac{1}{2}x=58+x$$
$$2\tfrac{1}{2}x=58-63$$
$$\tfrac{5}{2}x=-5$$
$$x=-2$$

Amerkung 1. Die Rechnung führt hier auf ein Resultat, welches mit dem Minus-Zeichen, als ein wesentliches Merkmal desselben behaftet ist. Um den Sinn dieses Vorzeichens durch unmittelbare Schlüsse herauszubringen, überlege man Folgendes:

Der Gang einer Rechnung bildet immer eine Kette reiner Vernunftschlüsse, die folgerecht durchgeführt, durchaus auf ein solches Resultat führen müssen, das auf die in Untersuchung gezogene Frage vollkommen passt. Nun kann es aber in der Natur der Sache liegen, in der Stellung der Frage &c., dass die zu suchende Grösse nicht in den vorausgesetzten, sondern gerade in den entgegengesetzten Sinn fällt.

Wir suchten, der Bedingung der vorliegenden Aufgabe gemäss, eine Grösse, welche statt x substituirt, der Gleichung:

$$3\tfrac{1}{2}(18+x)=58+x$$

Genüge leistet, oder im Sinne der Aufgabe gesprochen: eine Grösse (x), welche mit 18 und 58 vereint, den fraglichen Zustand der beiden Alter giebt. Die obige Gleichung, kunstgerecht behandelt, muss nun n o t h w e n d i g für x einen solchen Werth geben, der den Betrag auf beiden Seiten gleich macht, und dieser Werth welcher er auch sein mag, muss, zu 18 und 58 gelegt (addirt), den fraglichen Zustand geben, das ist klar. Kann nun aber die Gleichheit der beiden Seiten nicht anders Statt finden, als wenn von 18 und von 58 einerlei Grösse subtrahirt wird, so muss auch nothwendig der für x gesuchte Werth mit dem Minus-Zeichen behaftet sein; die Rechnung, als eine Zeichensprache, kann den Umstand, dass statt zu addiren, subtrahirt werden muss, nicht in Worten, sondern nur in Zeichen andeuten. Da wir nämlich im Sinne der Addition rechnen, so muss wohl die zu addirende Grösse als eine inverse gefunden werden, weil eine directe Grösse hier nicht möglich ist. Die unbekannte Grösse x ist nicht allein hinsichtlich ihrer wirklichen Grösse, sondern auch hinsichtlich des Sinnes (Vorzeichens), in welchem sie genommen werden muss, unbekannt. Das vorläufig vor x gesetzte + Zeichen bezieht sich nicht auf den bestimmten Werth von x, sondern deutet bloss die (algebraische) Operation an, die damit vorgenommen werden soll, und steht also abgekürzt, statt des Wortes plus (lege hinzu). Hiernach ergiebt sich nun die Bedeutung des mit dem Minus-Zeichen behafteten Resultats. Die gesuchte Grösse fällt nämlich nicht, wie vorausgesetzt, direct in die Zukunft, sondern gerade umgekehrt (invers), zwei Jahre zurück in die Vergangenheit. Für den fraglichen Zustand ist also des Vaters Alter 58 plus $-2=56$; des Sohnes Alter: 18 plus $-2=16$ Jahre. Solche Fälle haben eigentlich zuerst auf den Begriff der entgegengesetzten Grössen geführt und die § 320 aus dem blossen Begriff abgeleiteten Regeln kennen gelehrt.

Anmerkung 2. Entgegengesetzte Grössen können nur da Sinn haben, wo es wirklich r e i n e Gegensätze giebt, wie Zukunft, Vergangenheit; rechts, links; vorwärts, rückwärts &c. Licht und Schatten sind keine reine Gegensätze, Licht hat keinen Gegensatz; alle wirklichen Dinge, Substanzen (Baum, Thier &c.), haben keine Gegensätze.

127.

97. Aufgabe. Ein Mann ist jetzt 58 Jahre, sein Sohn 18 Jahre; wie viel muss man zurückrechnen, oder von beider Alter subtrahiren, um den Zustand zu erhalten, wo der Vater noch 6mal so alt war, als sein Sohn?

Auflösung. Man setze die zu subtrahirenden Jahre $= x$, so war des Vaters Alter $= 58 - x$ und des Sohnes Alter $18 - x$, und da nun jenes 6mal so gross sein soll, so hat man:

$$58 - x = 6(18 - x)$$
$$58 - x = 108 - 6x$$
$$5x = 50$$
$$x = 10$$

folglich müssen 10 Jahre subtrahirt werden, und des Vaters Alter ist dann 58 minus $10 = 48$, des Sohnes Alter 18 minus $10 = 8$.

128.

98. Aufgabe. Der Vater sei wieder 58, der Sohn 18 Jahre alt, und gefragt: wie viel muss von beider Alter subtrahirt werden, um den Zustand zu erhalten, wo des Vaters Alter noch 3mal so gross war, als des Sohnes Alter?

Auflösung. Man setze die zu subtrahirenden Jahre $= x$, so ist des Vaters Alter $58 - x$, des Sohnes Alter $= 18 - x$, mithin laut Bedingung:

$$58 - x = 3(18 - x)$$
$$58 - x = 54 - 3x$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

Der fragliche Augenblick fällt also nicht, wie vorausgesetzt, direct in die Vergangenheit, sondern gerade entgegengesetzt (invers) in die Zukunft, und des Vaters Alter ist dann $= 58$ minus $-2 = 60$; und des Sohnes Alter $= 18 - (-2) = 20$ Jahre. (Siehe vorhergehende Anmerkungen und § 320.)

129.

99. Aufgabe. Wie gross, und in welchem Sinn muss der Factor x genommen werden, damit er folgender Gleichung Genüge leistet?

$$25 + 4x = 7 - 2x$$

Auflösung. Man hat gleich

$$6x = -18$$
$$x = -3$$

Substituirt man diesen Werth -3 statt x in die gegebene Gleichung, so wird sie

$$25 + 4.(-3) = 7 - 2.(-3)$$
$$\text{d. i. } 25 - 12 = 7 + 6$$

Die Gleichung lehrt, dass sie nur dann Sinn haben kann, wenn der inverse Factor, wie § 320 gedeutet wird.

Zwölftes Buch.

Rechnung mit allgemeinen Grössenzeichen.

(Sogenannte Buchstabenrechnung.)

130.

Einleitung. Manche verwickelte Rechnungen lassen sich oftmals bedeutend vereinfachen, wenn man die vorzunehmenden Operationen, wie Addition, Subtraction, Multiplication &c. nicht gleich vollzieht, sondern vermittelst der Zeichen $+$, $-$ &c. vorher erst andeutet, weil man dann alle zu vollziehenden Rechnungen auf einmal vor Augen hat, die stattfindenden Abkürzungen und Zusammenziehungen, die Vortheile, welche gemeinschaftliche Factoren gewähren &c., so wie auch die Fälle, wo sich widerstreitende Grössen gegenseitig tilgen und mithin als überflüssig angelassen werden können u. m. dergl. leichter gewahren und benutzen kann. Ein paar Beispiele werden dies erläutern:

Erstes Beispiel. Welche Grösse kommt heraus, wenn man die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden Brüche: $\frac{4576}{5777}$ und $\frac{213}{7691}$ zusammen addirt?

Auflösung. Deuten wir die zu machende Rechnung vorläufig nur an, so bedeutet $\frac{4576}{5777}+\frac{213}{7691}$ die Summe und mithin $\frac{1}{2}(\frac{4576}{5777}+\frac{213}{7691})$ die halbe Summe und eben so $\frac{1}{2}(\frac{4576}{5777}-\frac{213}{7691})$ die halbe Differenz der beiden Brüche. Beide zusammengelegt, geben den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4576}{5777}+\frac{213}{7691}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4576}{5777}-\frac{213}{7691}\right)$$

welcher alle zu machenden Rechnungen vor Augen legt. Statt sie nun aber gleich zu vollziehen, überlege man erst, ob sich der Ausdruck (etwa durch Auflösung der Klammern &c.) nicht noch etwas zusammenziehen und auf einen leichter zu berechnenden Ausdruck zurückführen (reduciren) lässt.

Die Klammern aufgelöst, lässt sich obiger Ausdruck auch so schreiben (§ 19):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4576}{5777}+\frac{1}{2}\cdot\frac{213}{7691}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4576}{5777}-\frac{1}{2}\cdot\frac{213}{7691}$$

Hier sieht man nun gleich, dass die vorliegende viertheilige Grösse zwei gleiche einstimmige und zwei gleiche widerstreitende Theile enthält. Letztere beiden, nämlich der 2te und 4te Theil, tilgen sich gegenseitig und können daher, [illegible] auf das Resultat

keinen Einfluss habend, ganz ausgelassen werden. Erstere beiden Theile, nämlich der 1ste und 3te, lassen sich leicht in ein Glied zusammenziehen; denn eine und dieselbe Grösse halb mal und noch ein halb mal nehmen, ist so viel als die ganze Grösse einmal nehmen. Mithin reducirt sich der obige Ausdruck auf ein einziges Glied $\frac{4}{8}\frac{5}{7}\frac{7}{7}\frac{6}{7}$, welches das gesuchte, ohne Rechnung, durch eine blosse Reduction erhaltene Resultat ist.

131.

Ein anderer sehr nahe liegender Gedanke, uns bei Reductionen, wie die vorhergehende, noch grössere Vortheile zu verschaffen, ist folgender: da wir beim Reduciren der Grössenausdrücke auf einfachere, die Theile der Grössen ganz unverändert lassen, sie gleichsam nur hin- und herschieben, kleine Zusammenfassungen und Auslassungen vornehmen, gleiche Factoren gegen einander aufheben &c., so können wir hinsichtlich der klarern Uebersicht, des schnellern und bequemern Schreibens, dadurch offenbar einen bedeutenden Vortheil erlangen, wenn man statt der Grössen, an welchen Rechnungen vollzogen werden sollen, vorläufig und bis zu Ende der Reduction einfachere, leichter zu schreibende und zu unterscheidende Zeichen als Stellvertreter setzt. Mit diesen Stellvertretern kann man dann, vermittelst der Zeichen $+$, $-$ &c., die zu machenden Rechnungen ebenfalls andeuten und die etwa möglichen Reductionen vollziehen und dann am Ende der Reduction, statt der gebrauchten einfachen Zeichen, die Werthe, welche sie vertreten haben, wieder zurücksetzen.

Was für einfache Zeichen man dieserhalb gebrauchen will, ist offenbar ganz willkürlich. Da wir jedoch, vermöge der Gewohnheit, die Buchstaben schnell nennen, schreiben und unterscheiden können, so sind sie auch zu Stellvertretern der Grössen am bequemsten.

Zur Erläuterung wollen wir wieder das vorhergehende Beispiel nehmen, wo die halbe Summe und halbe Differenz der beiden Grössen $\frac{4}{8}\frac{5}{7}\frac{7}{7}\frac{6}{7}$ und $\frac{2}{7}\frac{1}{6}\frac{3}{91}$ zusammengelegt werden soll, und der Kürze wegen für die erste Grösse einen beliebigen Buchstaben, z. B. a, und für die andere Grösse einen andern, z. B. b, setzen, alsdann deutet $a+b$ die Summe, mithin $\frac{1}{2}(a+b)$ oder $\frac{a+b}{2}$ die halbe Summe und eben so $\frac{1}{2}(a-b)$ oder $\frac{a-b}{2}$ die halbe Differenz der beiden, einstweilen durch a und b vertretenen Grössen an, und der Ausdruck:

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$$

stellt, wie vorhin, alle Rechnungen dar, welche die Aufgabe zu machen verlangt. Statt nun aber diese angedeutetermaassen gleich zu vollziehen, indem man für die Buchstaben ihre Werthe wieder

zurücksetzt, versuche man erst den Ausdruck auf einen einfachern zu reduciren. Offenbar kann man ihn auch so schreiben (§ 20):

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$$

Hier wird nun $+\frac{b}{2}$ durch $-\frac{b}{2}$ getilgt, $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ ist so viel als a. Mithin reducirt sich der ganze Ausdruck $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$ auf die eintheilige Grösse a, wofür der Werth $\frac{1578}{8777}$, als das gesuchte Resultat, zurückgesetzt werden muss.

132.

Zweites Beispiel. Ein Fussgänger ist mit stets gleich bleibender Geschwindigkeit von einem Orte, O, nach einem andern Orte, W, gegangen. Er ging Vormittags 8 Uhr 4 Minuten 59 Secunden von O ab, und kam Nachmittags 3 Uhr 57 Minuten 48 Secunden in W an. Man frägt nach dem Stande der Uhr, als er gerade die Mitte seines Weges erreichte.

Auflösung. Die Hälfte der auf den ganzen Weg verwandten Zeit zur Vormittagszeit addirt, giebt den fraglichen Stand der Uhr. Um aber erst die auf den ganzen Weg verwandte Zeit zu erhalten, müssen wir, weil die Uhr nur bis 12 in einem fortzählt, erst die Vormittagszeit von 12 subtrahiren, um die bis 12 verflossene Zeit zu erhalten, und diese dann zur Nachmittagszeit addiren, von der Summe die Hälfte nehmen und zur Vormittagszeit hinzulegen, wie es folgende Rechnung zeigt:

O ———————— : ———————— W

$8^h\ 4'\ 59''$ $\qquad$ $3^h\ 57'\ 48''$;

		12^h	$0'$	$0''$
Vormittagszeit	=	8^h	$4'$	$59''$
die bis 12^h verflossene Zeit	=	3^h	$55'$	$1''$
Nachmittagszeit	=	3^h	$57'$	$48''$
Auf den ganzen Weg verflossene Zeit	=	7^h	$52'$	$49''$
2)				
Auf die Hälfte des Weges verflossene Zeit	=	3^h	$56'$	$24\frac{1}{2}''$
Hiezu die Vormittagszeit	=	8^h	$4'$	$59''$
Stand der Uhr	=	12^h	$1'$	$23\frac{1}{2}''$

Folglich hatte der Fussgänger 1 Minute $23\frac{1}{2}$ Secunden nach 12 Uhr die Mitte seines Weges erreicht.

Dasselbe Resultat kann man aber folgendermaassen viel kürzer erhalten.

Deuten wir die oben gleich vollzogenen Rechnungen vorläufig nur an, indem wir zugleich, des leichtern Schreibens wegen, für die Grösse der gegebenen Vormittagszeit einstweilen das einfache Zeichen a und für die Nachmittagszeit das Zeichen b substituiren, so können

wir durch $12 - a$ die bis 12 Uhr, durch $12 - a + b$ die auf den ganzen Weg und mithin durch $\frac{12 - a + b}{2}$ die auf die Hälfte des Weges verflossene Zeit kurz andeuten. Wird hiezu wieder die Vormittagszeit gerechnet, so erhalten wir für den fraglichen Stand der Uhr den Ausdruck:

$$\frac{12 - a + b}{2} + a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas vereinfachen, wenn wir ihn auf einerlei Nenner bringen. Statt der ohne Nenner stehenden Grösse a, kann man auch $\frac{2a}{2}$ setzen, und mithin den obigen Ausdruck so schreiben:

$$\frac{12 - a + b}{2} + \frac{2a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\frac{12 - a + b + 2a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

In dem Zähler dieses Ausdrucks befinden sich jetzt zwei widerstreitende Grössen, nämlich $-a$ und $+2a$. Nun ist aber $-a + 2a = a$. Setzen wir also a, statt $-a + 2a$, so lässt sich der obige Ausdruck noch einfacher so schreiben:

$$\frac{12 + a + b}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Alle vier verschiedenen Ausdrücke müssen offenbar einerlei Resultat geben, wenn man statt der Buchstabengrössen die numerischen Werthe derselben substituirt. Der letzte Ausdruck, der sich nicht weiter reduciren lässt, ist aber für die numerische Rechnung am bequemsten. Nach seiner Vorschrift braucht man nur, um die fragliche Zeit zu erhalten, die gegebenen Vormittags- und Nachmittags-Zeiten zu 12 zu addiren, und von der Summe die Hälfte zu nehmen. Für die vorliegende Aufgabe ist nämlich:

12 =	12 st.	0′	0″
a =	8 „	4′	59″
b =	3 „	57′	48″
	24 st.	2′	47″
2 |	12 st.	1′	23½″

Nach dieser Vorbereitung wird der folgende § dem Anfänger hoffentlich verständlicher werden, ihm doch wenigstens einen ungefähren Begriff von dem eigentlichen Sinn und Zweck der sogenannten Buchstabenrechnung geben, und dadurch das Fremdartige und Dunkle, welches dieser Theil der Mathematik für Anfänger hat, entfernen

133.

Begriff der Buchstabenrechnung. 1) Wenn eine Grösse aus andern berechnet werden soll, so ist offenbar die Hauptsache, dass man erst überlege, wie gerechnet werden muss, das Rechnen selbst ist das Wenigste. Um nun die Aufmerksamkeit nicht durch Nebensachen zu stören, wie durch addiren, multipliciren &c., was bis zuletzt aufgeschoben werden kann, suche man den Gang, den die Rechnung nimmt, möglichst kurz darzustellen, indem man alle vor zunehmenden Operationen vorläufig bloss andeutet, und des bequemern Schreibens wegen, für die Hauptgrössen einstweilen einfache Zeichen (Buchstaben) als Stellvertreter setzt. Dies ist offenbar das beste Mittel, bei verwickelten Untersuchungen den Lauf der Gedanken zu verfolgen und eine Kette von Schlüssen schnell zu bezeichnen.

2) Die Art und Weise, wie eine Aufgabe gelöst wird, beruht auf Vernunftschlüssen, die für alle Aufgaben derselben Art immer dieselben sind und nicht von der Grösse der Data abhängen. So gilt z. E. der vorhin gefundene Buchstaben-Ausdruck; $\frac{12+a+b}{2}$ nach welchem wir die dort gesuchte Zeit berechneten, auch zugleich für jeden andern Fall derselben Art, wo also nicht die Aufgabe, sondern nur die Data verändert sind, und daher ist durch $\frac{12+a+b}{2}$ die allgemeine Regel (Formel) bezeichnet, nach welcher wir aus den hier allgemein durch a und b angedeuteten Vormittags- und Nachmittags-Zeiten, sobald sie nur in bestimmten Zahlen gegeben werden, die fragliche Zeit immer leicht finden können. Würde z. B. gesagt, der Fussgänger sei um 9 Uhr von O abgegangen und um 3 Uhr in W angekommen und nach der Zeit gefragt, als er die Mitte des Weges erreichte, so braucht man in den Ausdruck $\frac{12+a+b}{2}$ nur 9 statt a, und 3 statt b, zu setzen. Man sieht also, dass die Buchstaben keine bestimmte Werthe haben, sondern bald dies, bald jenes bedeuten können.

3) Endlich dienen auch die Buchstaben, als Grössenzeichen, zur Abkürzung des Vortrags, sowohl des schriftlichen als mündlichen; deshalb werden auch, um nicht durch Zahlen und die vier Species Raum und Zeit unnöthig auszufüllen, in der Theorie die Untersuchungen gleich allgemein durchgeführt, die Grössen durch Buchstaben bezeichnet, die damit vorzunehmenden Rechnungen bloss angedeutet und dann die etwa möglichen, gleich näher zu erläuternden Reductionen vollzogen. Wer eine allgemein gestellte Aufgabe lösen kann, der kann es auch in jedem besondern Fall, (wo die Date in bestimmten Zahlen gegeben werden) und umgekehrt, denn die Schlüsse sind ja in beiden Fällen dieselben. Die allgemeine

Auflösung unterscheidet sich von der besondern bloss dadurch, dass sie, weil die Grösse der Data unbestimmt gelassen ist, die damit vorzunehmenden Rechnungen bloss andeuten kann, die erhaltenen Ausdrücke jedoch, nach den Regeln der Buchstabenrechnung, gleich auf die bequemste Form reducirt. Die allgemeine Auflösung ist aber immer belehrender, indem sie allgemeine Begriffe giebt, Ursache und Wirkung vor Augen legt, welche in der speciellen Auflösung nicht so deutlich hervortreten können, weil durch die Vereinigung der Zahlen die Anschauung der Art und Weise, wie dieselben eigentlich wirken und sich mit einander verbinden, verloren geht.

134.

Geht man mit einer richtigen Vorstellung aus, so muss man dies Capitel über die Buchstabenrechnung als das allerleichteste in der ganzen Mathematik finden, wenn auch die Reductionen selbst ein wenig Aufmerksamkeit und mechanische Fertigkeit verlangen. Man bemerke nur noch, dass das sogenannte Buchstabenrechnen kein wirkliches (numerisches) Rechnen, sondern nur ein andeutendes Rechnen, ein wissenschaftliches Zusammenstellen, Zergliedern, Zusammenziehen (Reduciren) der durch Buchstaben vertretenen Grössen ist. Die Buchstabenrechnung stellt zu dem Ende verschiedene Grössen-Ausdrücke auf und lehrt das Verfahren, wie man dieselben auf kürzere reduciren kann, oder auch ihre Form so zu verändern, dass dadurch Reductionen möglich werden. Die üblichen Gebräuche bei der Buchstabenrechnung und die sich übrigens von selbst ergebenden leichten Regeln sind in folgenden §§ enthalten.

135.

Weil es dem Auge gefälliger ist, so pflegt man hinsichtlich der Aufeinanderfolge mehrerer Buchstaben manchmal die alphabetische Ordnung zu beobachten. Soll z. B. die Addition der durch c, a, b vertretenen Grössen angedeutet werden, so schreibt man statt $c+a+b$ lieber $a+b+c$.

136.

Um die Multiplication mehrerer Buchstaben-Grössen anzudeuten, setzt man die Factoren unmittelbar neben einander und zwar ohne Multiplicationszeichen, welches hier entbehrlich ist. Sollen z. B. die Grössen b, a, x mit einander multiplicirt werden, so schreibt man statt $a \cdot b \cdot x$ kurz abx.

137.

Ist eine Buchstaben-Grösse mit einer Zahl zu multipliciren, so setzt man den numerischen Factor, hier Coefficient genannt, immer voran. Soll z. B. a mit 3 multiplicirt werden, so schreibt man $3a$, und 3 ist hier der Coefficient von a. In $\frac{3}{5}ax$ ist $\frac{3}{5}$ der Coefficient von ax &c.

Den Coefficienten 1 schreibt man nicht, statt $1 \cdot a$; $1 \cdot abc$ schreibt man kurz: a, abc.

138.

Buchstaben-Ausdrücke heissen gleichnamig, wenn sie aus denselben Buchstaben und auf dieselbe Weise gebildet sind, wobei aber die Coefficienten verschieden sein können. So sind z. B. $2ab$; $-\frac{2}{3}ab$, $12ab$ gleichnamig. Eben so $3aax$, $25aax$ &c.; die Audrücke ab, $a+b$, $3abc$, $2abb$ hingegen sind ungleichnamig.

139.

Addition. Man schreibt die zu addirenden Grössen mit ihrem Vorzeichen in beliebiger Folge nach einander hin, indem man die etwa gleichnamigen Theile durch (algebr.) Addition ihrer Coefficienten in eine Summe zusammenzieht. So schreibt man z. E. statt $a+a+a$ kürzer $3a$, statt $abc+6abc$ kürzer $7abc$, statt $\frac{2}{3}ax+\frac{3}{4}ax$ kürzer $\frac{17}{12}ax$, statt $2ab+3ax+ab$ kürzer $3ab+3ax$.

Eben so verfährt man, wenn die in eine Summe zu bringenden Buchstabengrössen vieltheilige sind, indem man sie nach einander hinsetzt und dann die gleichnamigen Theile, welche man, der leichtern Uebersicht wegen, auch erst unter einander stellen kann, in Eins zusammenzieht. Sollen z. E. die Grössen $8ax-3bc$; $2aax-3$; $-5ax+7$; $6bc-4ax$ addirt werden, so hat man:

$$8ax-3bc+2aax-3-5ax+7+6bc-4ax=2aax-ax+3bc+4$$

oder unter einander geordnet:

$$\begin{array}{rrrrr} & 8ax & -3bc & & \\ & & & +2aax & -3 \\ & -5ax & \ldots\ldots & \ldots\ldots & +7 \\ & -4ax & +6bc & & \\ \hline \text{Summe:} & -ax & +3bc & +2aax & +4 \end{array}$$

Um sich von der Richtigkeit einer Reduction durch Beispiele zu überzeugen, mögen Anfänger, sowohl in die gegebenen, als durch Reduction daraus abgeleiteten Ausdrücke, statt der Buchstaben ganz beliebige Zahlen setzen, und zusehen, ob beide einerlei Resultat geben. (§. 328.)

140.

Subtraction. Man addire den Subtrahendus mit umgekehrtem Vorzeichen algebraisch zum Minuendus, und ziehe die etwa gleichnamigen Theile in Eins zusammen (§ 128). Soll z. B. $2a$ von $6a$ subtrahirt werden, so hat man $6a-2a=4a$. Eben so ist $2ax$ von $6ax$ subtrahirt: $6ax-2ax=4ax$; b von a subtrahirt, giebt $a-b$. Will man bloss andeuten, dass eine vieltheilige Grösse von einer andern, eintheiligen oder vieltheiligen Grösse subtrahirt werden soll.

so muss man den vieltheiligen Subtrahendus in Klammern schliessen, und mithin beim wirklichen Subtrahiren alle in der Klammer stehenden Vorzeichen umkehren;* z. B. $y-a$ von x subtrahirt, giebt:

$$x-(y-a)=x-y+a$$

$2ab+6bc-4x$ von $2ab-3bc$ giebt angedeutet:

$$2ab-3bc-(2ab+6bc-4x)$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man die Klammern auflöst:

$$=2ab-3bc-2ab-6bc+4x=4x-9bc$$

Eben so ist:

$$a+b-(a-b)=a+b-a+b=2b$$

Sind Minuendus und Subtrahendus vieltheilig, so kann man sie auch erst geordnet unter einander stellen, z. B.:

von:	$2ab-3bc$	von:	$2ax-6bz+7$
subtr.:	$2ab+6bc-4x;$	subtr.:	$6ax-3by-3$
	$(-)\quad(-)\quad(+)$		$(-)\quad(+)\quad(+)$
Differenz:	$-9bc+4x:$		$-4ax-6bz+3by+10;$

Addirt man den Rest zum Subtrahendus, so muss, als Probe der richtigen Rechnung, der Minuendus wieder kommen.

141.

Multiplication. **Erster Fall.** Sind die Factoren eintheilige Grössen, so stelle man sie, alphabetisch geordnet, neben einander, und multiplicire nur die etwaigen numerischen Factoren (Coefficienten) mit einander (§ 320), z. B. $2a$ mit $3b$ multiplicirt, giebt $2a\cdot 3b=2\cdot 3\cdot ab=6ab$. Eben so ist:

$$3ab\cdot 5ac=15aabc; \qquad 17ax\cdot 3b=51abx;$$

$$\tfrac{2}{3}ab\cdot\tfrac{3}{4}x=\tfrac{1}{2}abx; \qquad 3abx\cdot 3bx=9abbxx;$$

$$\tfrac{1}{3}a\cdot\tfrac{3}{4}bc=\frac{abc}{4}; \qquad 5a\cdot\tfrac{1}{6}b\cdot\tfrac{4}{5}c=\frac{2\,abc}{3};$$

$$\tfrac{2}{3}ax\cdot\tfrac{3}{5}b\cdot\tfrac{5}{6}=\frac{abx}{3}; \qquad \tfrac{2}{7}am\cdot\tfrac{7}{8}n=\frac{amn}{4};$$

---

* Anfänger mögen sich diese Regel über die Umkehrung der Zeichen durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Soll z. B. die zweitheilige Grösse $7-2$, $(=5)$ von 18 subtrahirt werden, so schreibt man dies so: $18-(7-2)$. Subtrahirt man nun, um die Klammer aufzulösen, erst 7, so hat man offenbar (weil nicht 7, sondern nur $7-2$, $(=5)$ subtrahirt werden soll, um 2 zu viel subtrahirt, welche 2 also wieder addirt werden muss, daher $18-(7-2)=18-7+2$ (vergl. § 88), indem $18-(7-2)$ so viel ist, als $18-1.(7-2)=18-7+2$.

Zweiter Fall. Ist der eine Factor eintheilig, der andere vieltheilig, so muss man, um die Multiplication bloss anzudeuten, den vieltheiligen Factor in Klammern schliessen. Zuweilen ist es aber (Behuf einer Reduction) erforderlich, die Klammern aufzulösen, und dann muss man (§ 19) mit dem eintheiligen Factor jeden Theil des vieltheiligen multipliciren. Soll z. B. die Grösse $a+b-c$ mit a multiplicirt werden, so ist $a(a+b-c)=aa+ab-ac$. Eben so ist:

$$2a(b-3c)=2ab-6ac$$
$$3ab(7ab-3ax+1)=21aabb-9aabx+3ab$$
$$(9ax-\tfrac{5}{7}by)\cdot 7b=63abx-5bby$$
$$x(y-1)=xy-x; \quad (a+1)b=ab+b$$
$$2ac-ab+a(b-c+x)=2ac-ab+ab-ac+ax=ac+ax$$

Dritter Fall. Sind beide Factoren vieltheilig, so multiplicire man mit jedem Theil des einen (am bequemsten des kürzesten) Factors jeden Theil des andern, und ziehe im entstehenden Producte die etwa gleichnamigen Theile in Eins zusammen. Man kann, der leichtern Uebersicht wegen, die Factoren auch erst unter einander stellen und wie No. 1, 2, 3 zeigt, verfahren.

Es ist übrigens gleichgültig, mit welchem Theil des Multiplicators man zuerst multiplicirt. Soll z. B. die Grösse $a+b-c$ mit $a-b$ multiplicirt werden, so ist, indem man die Grösse $a+b-c$ oder jeden Theil derselben $a$mal und dann $-b$mal nimmt*

$$(a-b)(a+b-c)=aa+ab-ac-ab-bb+bc=aa-ac-bb+bc$$

(1)
$$\begin{array}{l} a+b-c \\ a-b \\ \hline aa+ab-ac \\ \quad -ab-bb+bc \\ \hline aa-bb-ac+bc \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ \quad -ab-bb \\ \hline aa-bb \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l} a-b \\ a+b \\ \hline aa-ab \\ \quad +ab-bb \\ \hline aa-bb \end{array}$$

* Auch hier mögen Anfänger sich die allgemeine Multiplicationsregel: *gleiche Zeichen geben* +, *ungleiche* — (§ 88), durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Sei z. B. die Grösse $8-3$, $(=5)$ mit $6-2$, $(=4)$ zu multipliciren, in Zeichen: $(6-2)(8-3)$. Nimmt man den Multiplicandus $8-3$ erst 6mal $=6(8-3)$, so hat man denselben offenbar (weil er nicht 6mal, sondern nur $6-2$, $(=4$mal$)$ gesetzt werden soll), um 2mal zu oft genommen, und es muss von dem 6fachen des Multiplicandus das 2fache desselben wieder subtrahirt werden, in Zeichen:

$$(6-2)(8-3)=6(8-3)-2(8-3)$$
folglich: $$(6-2)(8-3)=48-18-16+6$$

indem wir nämlich, um $8-3$, $(=5)$ zweimal von $48-18$ zu subtrahiren, erst 2.8 subtrahiren, haben wir um 2.3 zu viel subtrahirt, daher $-2.-3=+6$. (Vergl. § 320.)

Eben so findet man:

$$(a+b)(a+b)=aa+ab+ab+bb=aa+2ab+bb$$
$$(a-b)(a-b)=aa-ab-ab+bb=aa-2ab+bb$$
$$(x+1)(y-1)=xy-x+y-1$$
$$(3ax-4by)(5bx+1)=15abxx+3ax-20bbxy-4by$$
$$(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{1}{4}y)(3x-\tfrac{4}{5}y-\tfrac{3}{2})=2xx-\tfrac{77}{60}xy-x+\tfrac{1}{5}yy+\tfrac{3}{8}y$$

142.

Factorenzerlegung. Oefter als die vorhergehenden Aufgaben, eine vieltheilige Grösse mit einer andern zu multipliciren, kommt der umgekehrte Fall vor: eine vieltheilige Grösse in Factoren zu zerlegen, und da gerade hierin der Hauptschlüssel zu den Reductionen liegt, so müssen Anfänger sich darin einige Fertigkeit erwerben. Allgemeine Regeln lassen sich aber hierzu nicht geben. Ein wenig Umsicht und Uebung ist erforderlich. Folgende Beispiele werden indessen zeigen, wie man dabei zu verfahren hat.

Multiplicirt man die Grösse $3a-4c+2$ mit $3ab$, so erhält man $9aab-12abc+6ab$. Käme nun umgekehrt in einer Rechnung der Grössen-Ausdruck $9aab-12abc+6ab$ vor, so würde ein nur wenig geübter Blick gleich wahrnehmen, dass alle Theile dieser Grösse erstlich den numerischen Factor 3 gemeinschaftlich haben, weil alle Theile durch 3 ohne Rest theilbar sind, ausserdem aber noch den literalen Factor ab, weil auch dieser in allen Gliedern vorkommt. Man kann also diesen Ausdruck als ein unentwickeltes Product darstellen, oder in Factoren zerlegen, wenn man den, allen Theilen gemeinschaftlichen, Factor $3ab$ heraushebt und vor die in Klammer geschlossene Summe der eigenthümlichen Factoren $3a-4c+2$ setzt. Es ist nämlich auf die einfachste Form reducirt:

$$9aab-12abc+6ab=3ab(3a-4c+2)$$

Eben so kann der Ausdruck $xx+xy$ in Factoren zerlegt werden, wenn man den, beiden Theilen gemeinschaftlichen, Factor x heraussetzt; es ist nämlich $xx+xy=x(x+y)$. Anfänger pflegen gewöhnlich bei folgenden Fällen, wo der eine eigenthümliche Factor 1 ist, Schwierigkeiten zu machen: $yx+y=y(x+1)$; $x-xx=x(1-x)$; $x+mx+nx=(1+m+n)x$. Von der Richtigkeit einer Factorenzerfällung kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Factoren wieder mit einander multiplicirt. Beispiele:

$$3ab+3ax=3a(b+x);\qquad 2Rn-4R=2R(n-2);$$

$$y-zy=y(1-z);\qquad \frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}=\frac{h}{2}(a+b)=h\cdot\frac{a+b}{2}$$

$$5ax-3by+6bz=5ax-3b(y-2z)=5ax+3b(2z-y)$$

NB. Setzt man einen negativen Factor vor eine Klammer, so müssen offenbar die Glieder in der Klammer ihr Vorzeichen umkehren.

Durch die Zerlegung in Factoren lässt sich ein Grössenausdruck oftmals sehr zusammenziehen und vereinfachen. So haben in dem folgenden Ausdrück die beiden ersten Glieder den Factor ac, die beiden folgenden Glieder den Factor bc gemeinschaftlich &c., hebt man diese heraus, so ist:

$$abc - acc - bbc + bcc + abd - acd - bbd + bcd$$
$$= ac(b-c) - bc(b-c) + ad(b-c) - bd(b-c)$$

Hier haben alle Theile den zweitheiligen Factor $b-c$ gemeinschaftlich, setzt man diesen wieder heraus, so ist der vorstehende Ausdruck

$$= (b-c)[ac - bc + ad - bd]$$
$$= (b-c)[c(a-b) + d(a-b)]$$
$$= (b-c)[(a-b)(c+d)]$$
$$= (a-b)(b-c)(c+d)$$

143.

Wenn man eine Grösse mit sich selbst multiplicirt, so nennt man (aus geometrischen Gründen) das entstehende Product das Quadrat von dieser Grösse; so ist z. B. 8·8 oder 64 das Quadrat von 8; von 5 ist das Quadrat 25; die Quadrate von 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ &c. sind 1, 4, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{25}$; das Quadrat von a ist aa (lies: aquadrat). Das Quadrat von $\frac{a}{2}$ ist $\frac{aa}{4}$ (lies: ein viertel aquadrat). Dies beachtet, merke man sich folgende zwei wichtige Sätze:

1) Die Summe zweier Grössen $(a+b)$ mit der Differenz derselben $(a-b)$ multiplicirt, giebt die Differenz ihrer Quadrate. Man hat nämlich durch wirkliche Multiplication

$$(a+b)(a-b) = aa - bb$$

Nach diesem Satze können wir also das Product aus der Summe und Differenz zweier Grössen gleich aus dem Gedächtniss niederschreiben. Beispiele:

$$(a+x)(a-x) = aa - xx; \qquad (a+1)(a-1) = aa - 1$$
$$(1+x)(1-x) = 1 - xx; \qquad (2a+\tfrac{1}{2}b)(2a-\tfrac{1}{2}b) = 4aa - \frac{bb}{4}$$

2) Wenn also umgekehrt die Differenz der Quadrate zweier Grössen vorkommt, wie $aa - bb$; $bb - yy$ &c., so kann man diese jedesmal in zwei Factoren (Summe und Differenz) auflösen. So ist z. E.

$$xx - zz = (x+z)(x-z); \qquad zz - 1 = (z+1)(z-1)$$
$$aa - xx = (x+a)(x-a); \qquad 1 - xx = (1+x)(1-x)$$
$$4aa - \frac{bb}{9} = \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left(2a - \frac{b}{3}\right)$$
$$57 \cdot 57 - 43 \cdot 43 = (57+43)(57-43) = 100 \cdot 14$$

144.

Division. Die Division kann im Allgemeinen nur angedeutet werden, wodurch man Grössen-Ausdrücke in Bruchsform erhält. Ist z. B. a durch b zu dividiren, so schreibt man: $\frac{a}{b}$, ebenso $2ax$ durch $3by$ dividirt: $\frac{2ax}{3by}$; $a+b$ durch $a-b$ dividirt: $\frac{a+b}{a-b}$

1) Haben aber Dividendus und Divisor Factoren gemeinschaftlich, so kann man diese gegen einander ausstreichen, weil der Quotient von der Grösse derselben unabhängig ist. So ist z. E. (§§ 22, 23, 38):

$$\frac{ac}{c} = a; \quad \frac{2abc}{3bc} = \frac{2a}{3}; \quad \frac{2abx}{3aabx} = \frac{2}{3a}; \quad \frac{6abb}{4bc} = \frac{3ab}{2c};$$
$$\frac{xy}{6y} = \frac{x}{6}; \quad \frac{a}{a} = 1; \quad \frac{b}{b} = 1; \quad \frac{a+b}{a+b} = 1; \quad \frac{a+c-d}{a+c-d} = 1;$$
$$\frac{(d+b)(a-b)}{a-b} = d+b; \quad \frac{ab(a+b)}{2b(a+b)} = \frac{a}{2}; \quad \frac{m(a+b)}{m(a+c)} = \frac{a+b}{a+c}$$

2) Ist der Dividendus eine vieltheilige, der Divisor eine eintheilige Grösse, so kann man mit dem Divisor in jeden Theil des Dividendus dividiren (§ 20). Es ist z. E.:

$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$$
$$\frac{8abb - 10ax}{2ab} = \frac{8abb}{2ab} - \frac{10ax}{2ab} = 4b - \frac{5x}{b}$$

3) Sind beide, Dividendus und Divisor, vieltheilige Grössen, so ist nur dann eine Vereinfachung möglich, wenn eine Factorenzerlegung Statt findet (§ 321). So ist z. B.:

$$\frac{ab - ax}{bb - bx} = \frac{a(b-x)}{b(b-x)} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{ax + xx}{3bx - xx} = \frac{x(a+x)}{x(3b-x)} = \frac{a+x}{3b-x}$$

$$\frac{y-yy}{3by-3byy}=\frac{y(1-y)}{3by(1-y)}=\frac{1}{3b}$$

$$\frac{ac-bcx-cz}{9bcz-cz}=\frac{c(a-bx-z)}{cz(9b-1)}=\frac{a-bx-z}{z(9b-1)}$$

$$\frac{6aa-3ab}{12ac-6bc}=\frac{3a(2a-b)}{6c(2a-b)}=\frac{a}{2c}$$

$$\frac{4ax-3bx-xx}{8ayz-6byz-2xyz}=\frac{x(4a-3b-x)}{2yz(4a-3b-x)}=\frac{x}{2yz}$$

$$\frac{ay+ty-av-tv}{az+tz-2au-2tu}=\frac{y(a+t)-v(a+t)}{z(a+t)-2u(a+t)}=\frac{(y-v)(a+t)}{(z-2u)(a+t)}=\frac{y-v}{z-2u}$$

$$\frac{(a+b)(a+b)}{aa-bb}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}\ (\S\ 143,\ 2)$$

$$\frac{xx+x}{1-xx}=\frac{x(x+1)}{(1+x)(1-x)}=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{mz-m}{m-my}=\frac{m(z-1)}{m(1-y)}=\frac{z-1}{1-y}=\frac{(-1)(z-1)}{(-1)(1-y)}=\frac{1-z}{y-1}$$

Brüche. Hat man mit Grössen-Ausdrücken in Bruchsform zu rechnen, so werden sie ganz nach den Regeln und Grundsätzen der allgemeinen Bruchrechnung behandelt.

145.

1. *Addition* und *Subtraction.* Haben die Brüche einerlei Nenner, so braucht man nur ihre Zähler algebraisch zu addiren oder subtrahiren und der Summe oder Differenz den gemeinschaftlichen Nenner wieder unterzuschreiben. So ist z. B. (§ 42):

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c};\qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c};$$

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x};\qquad \frac{a}{a-z}-\frac{z}{a-z}=\frac{a-z}{a-z}=1;$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=a;$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b-(a-b)}{2}=b;$$

$$\frac{ac-by}{ac}+\frac{cx}{ac}+\frac{by}{ac}=\frac{ac+cx}{ac}=\frac{c(a+x)}{ac}=\frac{a+x}{a}$$

$$\frac{a}{aa-yy}+\frac{y}{aa-yy}=\frac{a+y}{(a+y)(a-y)}=\frac{1}{a-y}\ (\S\ 143,\ 2)$$

Haben die Brüche nicht einerlei Nenner, so pflegt man sie, der Gleichförmigkeit wegen, oftmals auf einerlei Nenner zu bringen, obgleich dadurch die Ausdrücke nicht immer vereinfacht werden.

Um z. B. die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf einerlei Nenner zu bringen, multiplicire man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit d, den andern mit b. Es ist nämlich: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$

Beispiele:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b};\ (\S\ 34)$$

$$\frac{12-a+b}{2}+a=\frac{12-a+b+2a}{2}=\frac{12+a+b}{2}$$

$$\frac{8a+6b}{4}-\frac{6a-2b}{3}=\frac{3(8a+6b)-4(6a-2b)}{12}=\frac{13b}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+b}{cd}=\frac{acd+b(a+b)}{bcd}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+b}{cd}+\frac{aa-bb-ab}{bcd}=\frac{acd+ab+bb+aa-bb-ab}{bcd}=\frac{a(cd+a)}{bcd}$$

$$a-\frac{az}{z+1}=\frac{a(z+1)}{z+1}-\frac{az}{z+1}=\frac{a}{z+1}$$

$$a-\frac{am}{m+n}=\frac{am+an-am}{m+n}=\frac{an}{m+n}$$

146.

2. *Multiplication* und *Division*. Um zwei Brüche mit einander zu multipliciren, multiplicire man wie gewöhnlich, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Soll ein Bruch durch einen andern dividirt werden, so braucht man nur mit dem umgekehrten Divisor zu multipliciren. (§§ 44, 47.) Beispiele:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{a}{b}=1 \qquad c:\frac{a}{b}=\frac{bc}{a}$$

$$8mn \cdot \frac{3xy}{4my} = 6nx \qquad \frac{1}{x} \cdot \frac{6x}{z} \cdot \frac{z}{3x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{5am}{bc} : \frac{15mxx}{6ac} = \frac{5am}{bc} \cdot \frac{6ac}{15mxx} = \frac{2aa}{bxx}$$

$$\frac{2ax}{3} : \frac{2ax}{3bc} = \frac{2ax}{3} \cdot \frac{3bc}{2ax} = bc$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{ma}{m+n+p} = \frac{na}{m+n+p}$$

$$\frac{a+x}{a-x} : \frac{ax+xx}{ax-xx} = \frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{x(a-x)}{x(a+x)} = 1.$$

147.

Folgende Buchstaben-Ausdrücke wird ein Geübterer allein zu reduciren wissen:

1) $a+2b-5+a$; 2) $a-(+b)$; 3) $a-(-b)$; 4) $-a \cdot -b$;

5) $-a \cdot -1$; 6) $a \cdot \frac{b}{2} \cdot 4$; 7) $3a \cdot 4b \cdot \frac{2}{3}c$; 8) $\frac{3}{4}ax \cdot \frac{2}{3}by$;

9) $\frac{4}{5}tz \cdot 3x \cdot \frac{5}{2}$; 10) $\frac{a}{b}$; 11) $\frac{-a}{b}$; 12) $\frac{a}{-b}$;

13) $\frac{-a}{-b}$; 14) $\frac{x}{x}$; 15) $\frac{-x}{x}$; 16) $\frac{2a}{2b}$;

17) $\frac{2x}{x}$; 18) $\frac{x}{2x}$; 19) $\frac{3axyy}{9axy}$; 20) $\frac{6abb}{4bc}$;

21) $\frac{a+y}{a+y}$; 22) $\frac{a+y}{a-y}$; 23) $\frac{\frac{2}{3}abb}{\frac{3}{4}aab}$; 24) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$;

25) $ax+6ax-8ax+5bx$; 26) $\frac{1}{3}ay-\frac{2}{3}ay+ay$;

27) $2ax-5by-16-(ax-16+5by)$; 28) $(a+b)(a+b)$;

29) $\frac{2}{3}atx-\frac{2}{3}bzz-(-3atx+\frac{1}{2}bzz)$; 30) $(ax+by)(ax-by)$;

31) $(a+b+c)(a+b-c)$; 32) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$;

33) $6aab-12abc+3ab$; 34) $x+mx+nx+px$;

35) $\frac{m}{2nx} \cdot \frac{n}{3m}$; 36) $\frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{a-x}{a+x}$; 37) $\frac{aa-bb}{a-b}$;

38) $\frac{aa-bb}{a+b}$; 39) $\frac{ay+yx}{3abx+3bxx}$; 40) $\frac{2ay-5by}{4axy-10bxy}$;

41) $\frac{a+x}{3}+\frac{a+x}{3}$; 42) $\frac{a}{b}:\frac{1}{c}$; 43) $\frac{a}{x}:\frac{2x}{y}$;

44) $7ax:\frac{14ax}{5by}$; 45) $\frac{a-x}{a+x}:\frac{aa-xx}{ax+xx}$;

46) $\frac{a(b-c)}{2}-\frac{b(a-c)}{2}$; 47) $\frac{100a+ap}{100}:\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

48) $\frac{az+bc}{az}-\frac{bc+xz}{az}$; 49) $\frac{16a-5b}{4b}-\frac{12a-2b}{3b}$;

50) $\frac{2x}{2y-c}\cdot\left(\frac{y+c}{3}-\frac{c}{2}\right)$; 51) $\frac{x}{a-\frac{ac}{x+c}}$;

52) $\frac{1-\frac{aa}{xx}}{\frac{1}{x}-\frac{a}{xx}}$; 53) $\frac{a+\frac{x-a}{1+ax}}{1-\frac{a(x-a)}{1+ax}}$;

• 54) $\left(\left[a-\frac{m(bn-a)}{n-m}\right]\cdot\frac{n-m}{n}+mb\right):\frac{a}{x}$

• 55) $\left(\left[\frac{1+\frac{aa-xx}{aa+xx}}{1-\frac{aa-xx}{aa+xx}}+1\right]\cdot\frac{1}{1+\frac{aa}{xx}}+\frac{aa-xx}{a-x}\right)\frac{a}{1+a+x}$

• 56) $\left(\frac{\left[\frac{(a-1)(ax-bx)}{x-ax}+c\right](a-x)}{a(b+c-a)}+\frac{(a-x)}{a}\right)\cdot\frac{aa+ax}{2(aa-xx)}$

Man findet: 1) $2(a+b)-5$; 2) $a-b$; 3) $a+b$;

4) ab; 5) a; 6) $2ab$; 7) $8abc$;

8) $\frac{abxy}{2}$; 9) $2txz$; 10) $\frac{a}{b}$; 11) $-\frac{a}{b}$;

12) $-\frac{a}{b}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) -1;

16) $\frac{a}{b}$; 17) 2; 18) $\frac{1}{2}$; 19) $\frac{y}{3}$;

20) $\frac{3ab}{2c}$; 21) 1; 22) $\frac{a+y}{a-y}$; 23) $\frac{8b}{9a}$;

24) $\frac{a+b}{x}$;   25) $5bx - ax = (5b - a)x$;   26) $\frac{2}{3}ay$;

27) $ax - 10by$;   28) $aa + 2ab + bb$;

29) $\frac{11atx}{3} - \frac{19bzz}{15}$;   30) $aaxx - bbyy$;

31) $aa + 2ab + bb - cc$;   32) $\frac{xx}{4} - \frac{yy}{9}$;

33) $3ab(2a - 4c + 1)$;   34) $(1 + m + n + p)x$;

35) $\frac{1}{6x}$;   36) 1;   37) $a + b$;

38) $a - b$;   39) $\frac{y}{3bx}$;   40) $\frac{1}{2x}$;

41) $\frac{2}{3}(a + x)$;   42) $\frac{ac}{b}$;   43) $\frac{ay}{2xx}$;

44) $\frac{5by}{2}$;   45) $\frac{x}{a+x}$;   46) $\frac{c(b-a)}{2}$;   47) a;

48) $\frac{a-x}{a}$;   49) $-\frac{7}{12}$;   50) $\frac{x}{3}$;   51) $\frac{x+c}{a}$;

52) $a + x$;   53) x;   54) x;   55) a;   56) 1.

Dreizehntes Buch.

Von den Functionen und Formeln.

148.

In der mathematischen Sprache kommt oftmals der Ausdruck vor: eine Grösse sei eine Function von einer oder mehreren andern Grössen, und dies soll dann so viel heissen: dass erstere Grösse von letzteren, gleich wie eine Wirkung von ihrer Ursache (Ursachen) abhängt, und folglich mit ihnen in einem gewissen Zusammenhange steht.

So ist z. E. die Grösse der Wurfsweite, welche eine abgeschossene Kanonenkugel erreicht, von mehreren andern Grössen abhängig, wie z. B. von der Grösse der Kugel, von dem Gewichte derselben, von der Menge und Güte des Pulvers, von der Länge des Rohrs, von der Grösse des Richtungswinkels, von dem Widerstande der Luft, von der Anziehungskraft der Erde &c. &c., weil alle diese Grössen Einfluss auf die Wurfsweite haben, mit ihr zusammenhängen und dieselbe bestimmen, und man sagt daher kurz: die Wurfsweite ist eine Function von den eben genannten Grössen.

149.

Zur grössern Erläuterung des vorstehenden § diene folgende einfache Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, deren 5ter und 7ter Theil zusammen genommen 24 giebt.

Auflösung. Es ist klar, dass die gesuchte Zahl (x) durch die Bedingung der Aufgabe und durch die gegebenen Zahlen 5, 7, 24 bestimmt, mit andern Worten eine Function von 5, 7, 24 ist, es muss nämlich sein:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 24$$

hieraus: $7x + 5x = 35 \cdot 24$

$$12\,x = 840$$

$$x = 70$$

Hier haben wir freilich die fragliche Zahl $x = 70$ gefunden, allein die Art und Weise, das eigentliche Gesetz (Formel, Regel), wie mit den Zahlen 5, 7, 24 gerechnet werden muss, um die durch sie bestimmte Grösse zu finden, konnte wegen der Verschmelzung dieser Zahlen in einander nicht hervortreten. Wollen wir dieses Gesetz aufstellen, um dadurch eine klare Uebersicht von dem Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung zu erhalten, nämlich wie die Ursachen sich mit einander verbinden, um die durch sie bestimmte Wirkung hervorzubringen, so müssen wir bei der Reduction der obigen Gleichung auf x die dabei vorkommenden arithmetischen Operationen nicht wirklich vollziehen, sondern nur andeuten, alsdann stellt sich das fragliche Gesetz, wie die gesuchte Grösse von den gegebenen abhängt, durch eine Formel dar, welche alle mit letzteren vorzunehmenden Rechnungen vor Augen legt.

Aus der Gleichung

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 24$$

folgt nämlich, indem wir, um x von den Nennern zu befreien, mit $5 \cdot 7$ multipliciren, diese Operation aber bloss andeuten:

$$7x + 5x = 5 \cdot 7 \cdot 24$$

Jetzt die Coefficienten von x addirt, jedoch nur andeutend, kommt:

$$(7 + 5)x = 5 \cdot 7 \cdot 24$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{7 + 5}$$

Dies wäre also die gesuchte Formel oder das Gesetz, aus welchem wir mit einem Blick ersehen, auf welche Weise die gesuchte Grösse x in unserer Aufgabe, aus den gegebenen Zahlen 5, 7, 24 entsteht. In Worten ausgesprochen, würde es so lauten: man muss alle drei Zahlen mit einander multipliciren und das Product durch die Summe der beiden ersten dividiren.

150.

Es ist leicht einzusehen, dass das Gesetz, nach welchem eine Grösse von anderen abhängt, nicht durch das absolute Quantum der letzteren, sondern bloss durch die Beziehungen, in welchen sie mit ersterer stehen, bestimmt ist. Würde z. B. gefragt: welche Zahl ist es, deren 3ter und 4ter Theil zusammenaddirt 21 giebt, so finden hier offenbar unter der gesuchten Grösse und denen, von welchen sie eine Function ist, ganz dieselben Beziehungen und Schlüsse wieder statt, wie in der Aufgabe des vorhergehenden §. Man braucht also auch nur in die dort entwickelte Formel 21 statt 24

und 3, 4 statt 5 und 7 zu setzen und die angedeuteten Rechnungen zu vollziehen, um die fragliche Zahl 36 zu erhalten.

Man kann also auch, um das Gesetz, nach welchem eine Grösse von andern abhängt, zu finden was bei allen mathematischen Untersuchungen immer die Hauptsache ist, die mit einander in Beziehung stehenden Grössen einfacher und, um ihre Verschmelzung zu verhindern, vorläufig mit allgemeinen Zeichen andeuten, die Beziehungen (Bedingungen) durch eine Gleichung ausdrücken und diese dann auf diejenige Grösse reduciren, für welche man die Formel sucht. (Vergl. § 133.)

Die Schlüsse, welche bei der Auflösung einer so allgemein ausgedrückten Gleichung gemacht werden müssen, sind offenbar ganz dieselben, als wenn statt der Buchstaben bestimmte Zahlen ständen, nur mit dem Unterschiede, dass wir hier alle vorkommenden arithmetischen Operationen bloss andeuten, die erhaltenen Buchstaben-Ausdrücke aber immer möglichst reduciren, um alle unnöthigen Rechnungen zu entfernen. Die vorhergehende Aufgabe können wir allgemein so ausdrücken:

Eine Zahl zu finden, deren $m$ter und $n$ter Theil zusammen addirt, a giebt.

Auflösung. Sei x die fragliche durch m, n, a bestimmte Zahl, so deutet $\frac{x}{m}$ den $m$ten und $\frac{x}{n}$ den $n$ten Theil derselben an, und die Bedingung der Aufgabe ist dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=a$$

Um hier x von den Nennern zu befreien, multipliciren wir die ganze Gleichung mit mn, so kommt

$$nx+mx=amn$$

Ferner, die Coefficienten von x addirt (den gemeinschaftlichen Factor x auf der linken Seite herausgesetzt), kommt:

$$(n+m)x=mna$$

Jetzt durch den Coefficienten $n+m$ dividirt, hat man:

$$x=\frac{mna}{m+n}$$

151.

Aufgabe. Die Zahl 140 in zwei Theile zu theilen, die sich wie 2 : 5 verhalten.

Auflösung. Die Theile sollen sich wie 2 : 5 oder, was dasselbe ist, wie $1 : \frac{5}{2}$ verhalten (§ 65); heisst also x der eine Theil, so ist $\frac{5}{2}x$ der andere, folglich:

$$x + \tfrac{5}{2}x = 140$$
$$2x + 5x = 280$$
$$7x = 280$$
$$x = 40 \quad \text{(der eine Theil)}$$
$$\text{und } \tfrac{5}{2}x = 100 \quad \text{(der andere Theil)}$$

Aufgabe. Eine Zahl a in zwei Theile zu theilen, die sich wie $m : n$ verhalten.

Auflösung. Da sich die Theile wie $m : n$ oder, was dasselbe ist, wie $1 : \frac{n}{m}$ verhalten, so ist, wenn x der eine Theil, $\frac{n}{m}x$ der andere, daher:

$$x + \frac{n}{m}x = a$$

multiplicirt mit m kommt: $mx + nx = ma$

$$(m+n)x = ma$$

mithin der eine Theil: $x = \dfrac{ma}{m+n}$

und der andere Theil: $\dfrac{n}{m}x = \dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{ma}{m+n} = \dfrac{na}{m+n}$

Als Probe der richtigen Rechnung müssen beide für x und $\frac{n}{m}x$ gefundenen Ausdrücke, nämlich: $\frac{ma}{m+n}$ und $\frac{na}{m+n}$, zusammen addirt, die Grösse a wiedergeben. Dies ist auch der Fall, denn:

$$\frac{ma}{m+n} + \frac{na}{m+n} = \frac{a(m+n)}{m+n} = a$$

152.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl a in drei solche Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen m, n, p verhalten.

Auflösung. Die drei Theile sollen sich wie m, n, p, oder, was dasselbe ist, wie 1, $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, verhalten; heisst also x der erste Theil, so ist $\frac{n}{m}x$ der zweite, $\frac{p}{m}x$ der dritte, und da alle drei zusammen $= a$ sein müssen, so hat man:

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$$

Um diese Gleichung auf x zu reduciren, multiplicire man die ganze Gleichung erst mit m, so kommt:

$$mx+nx+px=ma$$

Die Coefficienten von x addirt, kommt:

$$(m+n+p)x=ma$$

also der erste Theil: $x=\frac{ma}{m+n+p}$

„ zweite „ $\frac{n}{m}x=\frac{n}{m}\cdot\frac{ma}{m+n+p}=\frac{na}{m+n+p}$

„ dritte „ $\frac{p}{m}x=\frac{p}{m}\cdot\frac{ma}{m+n+p}=\frac{pa}{m+n+p}$

Soll z. E. 100 in drei solche Theile getheilt werden, die sich wie $2:5:3$ verhalten, so ist hier: $a=100$, $m=2$, $n=5$, $p=3$; mithin der erste Theil $2\cdot\frac{100}{10}=20$; der zweite $5\cdot10=50$; der dritte $3\cdot10=30$.

153.

Aufgabe. Eine Zahl $a=100$ in zwei solche Theile zu theilen, dass, wenn der eine Theil durch $m=5$, der andere durch $n=8$ dividirt wird, die Summe der Quotienten $b=17$ sei:

Auflösung. Sei x der eine, folglich $(a-x)$ der andere Theil, so hat man laut Bedingung der Aufgabe:

$$\frac{x}{m}+\frac{a-x}{n}=b$$

Die ganze Gleichung mit mn multiplicirt, kommt:

$$nx+ma-mx=mnb$$

Jetzt die bekannten Glieder von den unbekannten gesondert:

$$nx-mx=mnb-ma$$
$$(n-m)x=m(nb-a)$$
$$x=\frac{m(nb-a)}{n-m}$$

Subtrahirt man diesen für den einen Theil x gefundenen Ausdruck $\frac{m(nb-a)}{n-m}$ von a; so erhält man auch die Formel für den andern Theil $a-x$. Es ist nämlich:

$$a-x=a-\frac{m(nb-a)}{n-m}$$

Dieser für $a-x$ gefundene Ausdruck lässt sich aber noch bedeutend abkürzen, wenn man ihn auf einerlei Benennung bringt, nämlich:

$$a-x=\frac{a(n-m)-m(nb-a)}{n-m}$$

Die Klammern aufgelöst:

$$a-x=\frac{an-am-mnb+am}{n-m}$$

$$a-x=\frac{an-mnb}{n-m}$$

$$a-x=\frac{n(a-mb)}{n-m}$$

Um sich zu überzeugen, dass man keinen Rechnungsfehler begangen habe, müssen die beiden für x und $a-x$ gefundenen Ausdrücke zusammenaddirt die Grösse a wiedergeben. Dies ist auch der Fall, weil:

$$\frac{m(nb-a)}{n-m}+\frac{n(a-mb)}{n-m}=\frac{mnb-ma+na-nmb}{n-m}$$

$$=\frac{na-ma}{n-m}=\frac{(n-m)a}{n-m}=a$$

154.

Aufgabe. Es hat Jemand in verschiedenen Terminen mehrere Zahlungen zu leisten: eine gewisse Summe s nach m Monaten, eine andere Summe s' nach m' Monaten, eine dritte Summe s'' nach m'' Monaten &c. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe $s+s'+s''+\ldots$ auf einmal zu erhalten. Nach wie viel Monaten muss diese Zahlung geleistet werden, damit weder der eine noch der andere Theil Schaden leidet? (Grössen einerlei Art pflegt man oft durch dieselben Buchstaben zu bezeichnen, und ihre Verschiedenheit durch Striche anzudeuten, wodurch der Ueberblick offenbar leichter wird, als wenn man lauter verschiedene Buchstaben gebrauchen wollte.)

Auflösung. Um leichter auf den Ansatz zu kommen, nehme man beliebige monatliche Procente an, und setze den Gewinn, den 100 Thlr. in 1 Monat bringen $=p$, so ist der Nutzen, welchen der Schuldner von der erst nach m Monaten

zu bezahlenden Summe s ziehen könnte $= \frac{spm}{100}$; ebenso ist der Nutzen, den die zweite nach m' Monaten zu bezahlende Summe bringt $= \frac{s'pm'}{100}$ &c., so dass also $\frac{spm}{100} + \frac{s'pm'}{100} + \frac{s''pm''}{100} + \ldots$ den Nutzen aller terminweise zu bezahlenden Pöste ausdrückt. Die Zeit, wo die ganze Summe $s + s' + s'' + \ldots$ auf einmal bezahlt wird, muss nun so weit hinausgesetzt werden, dass die ganze Summe erst einen dem obigen gleichen Nutzen bringen kann. Heisst also diese Zeit x, so muss sein:

$$\frac{(s+s'+s''+\ldots)px}{100} = \frac{spm}{100} + \frac{s'pm'}{100} + \frac{s''pm''}{100} + \ldots$$

Alle Glieder haben hier den Factor p und den Nenner 100 gemeinschaftlich, lässt man diese als überflüssig weg, indem man die ganze Gleichung mit $\frac{100}{p}$ multiplicirt, dann auf beiden Seiten durch $s + s' + s'' + \ldots$ dividirt, so kommt:

$$x = \frac{sm + s'm' + s''m'' + \ldots}{s + s' + s'' + \ldots}$$

Man sieht also, dass die gesuchte Zeit eine von p unabhängige Function ist. In Worten lautet diese Formel: Man muss die zu bezahlenden Pöste mit den in einerlei Einheit ausgedrückten Zeiten multipliciren, und die Summe dieser Producte durch die Summe der Pöste dividiren.

Beispiel. Es hat Jemand folgende vier an einem Tage ausgestellte Wechsel ohne Zinsen zu zahlen: 300 Thlr. nach 14 Tagen: 200 Thlr. nach 3 Wochen; 150 Thlr. nach 2 Monaten, und 100 Thlr. nach 28 Tagen; alle Pöste sollen auf einmal bezahlt werden, welchen Termin (x) muss man setzen?

Antwort. Hier ist

$s = 300$	$s' = 200$	$s'' = 150$	$s''' = 100$
$m = 14$	$m' = 21$	$m'' = 60$	$m''' = 28$
$sm = 4200$;	$s'm' = 4200$;	$s''m'' = 9000$;	$s'''m''' = 2800$

$$sm + s'm' + s''m'' + s'''m''' = 20200$$

$$s + s' + s'' + s''' = 750$$

$$x = \frac{20200}{750} = 27 \text{ Tage (beinahe)}$$

Anmerkung. In allen Fällen, wo eine zu suchende Grösse nur scheinbar Function von einer andern ist, wie im vorhergehenden Beispiel x von p, hat letztere Grösse auch nichts in der Function zu schaffen, und muss nach gehöriger Reduction immer wieder herausfallen. So ist z. E. der Werth des schlecht reducirten Ausdrucks:

$$\left(\left[a - \frac{m(bn-a)}{n-m}\right]\frac{n-m}{n} + mb\right)\frac{x}{3a}$$

nur scheinbar eine Function von a, b, m, n. Setzt man z. B. $x = 5$, so kann man statt a, b, m, n setzen, was man will, der Ausdruck giebt doch immer nur $1\frac{2}{3}$ *

Ebenso ist der Ausdruck $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)$, eine von b unabhängige Function.

---

* Der Ausdruck lässt sich (durch Einrichten der Grösse in der ersten Klammer) auf den einfachen $\frac{x}{3}$ reduciren.

155.

Wenn eine Grösse eine Function von mehreren andern Grössen ist, so ist auch umgekehrt jede der letzteren eine Function von allen übrigen. So ist z. B. der **Zinsertrag** eines Capitals eine Function von dem angelegten Capital, von den Procenten, zu welchen es belegt wird, und von der Zeit, während welcher es steht. Umgekehrt ist aber jede der letzteren Grössen, z. B. die **Zeit**, in welcher ein gewisser Zinsertrag fällig wird, durch die Grösse dieses Zinsertrags, des Capitals und der Procente bestimmt. Kann man nun zwischen mehreren zusammengehörigen, durch allgemeine Zeichen angedeuteten Grössen eine Gleichung auffinden, und diese dann auf jede der, durch einander bestimmten Grössen reduciren, so erhält man eben so viele Formeln, welche dann eine klare Uebersicht geben, wie jede Grösse von den mit ihr verbundenen abhängt und daraus bestimmt werden kann.

156.

Aufgabe. Wenn die n jährigen Zinsen eines zu p Procent belegten Capitals, C, zum Capital geschlagen, und die Grösse dieses neuen Capitals mit C′ bezeichnet wird, so ist jede dieser vier Grössen n, p, C, C′ eine Function von den drei übrigen. Es werden die Formeln derselben verlangt.

Auflösung. Der Ausdruck: $\frac{Cpn}{100}$ stellt die n jährigen Zinsen und folglich $C+\frac{Cpn}{100}$ Capital sammt den n jährigen Zinsen dar, und da diese Grösse durch C′ bezeichnet werden soll, so hat man sogleich:

$$C' = C + \frac{Cpn}{100}$$

Um diese Gleichung auch auf C, p und n zu reduciren, multiplicire man erst auf beiden Seiten mit 100, so kommt:

$$100\,C + Cpn = 100\,C'$$

die Coefficienten von C addirt, kommt:

$$(100 + pn)\,C = 100\,C'$$

jetzt durch den Coefficienten von C dividirt, kommt:

$$C = \frac{100\,C'}{100 + np}$$

Aus der Gleichung: $100\,C + Cpn = 100\,C'$

folgt: $Cpn = 100\,C' - 100\,C$

durch Cn dividirt, kommt:

$$p = \frac{100\,(C' - C)}{nC}$$

durch Cp dividirt, kommt auch:

$$n = \frac{100\,(C' - C)}{pC}$$

Die verlangten Formeln sind also:

$$C' = C + \frac{Cpn}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$C = \frac{100\,C'}{100 + pn} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$p = \frac{100\,(C' - C)}{nC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{100\,(C' - C)}{pC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Beispiel. Wie gross muss das Capital sein, welches mit seinen 6jährigen Zinsen zu $4\frac{1}{2}$% vereinigt, ein Capital von 762 Thlr. giebt?

Hier ist gegeben: $n = 6$, $p = 4\frac{1}{2}$, $C' = 762$ und C gesucht. Die Formel 2 giebt:

$$C = \frac{100 \,.\, 762}{100 + 6 \,.\, 4\frac{1}{2}} = \frac{76200}{127}$$

$$C = 600 \text{ Thlr.}$$

Wie lange muss das Capital von 600 Thlr. zu 5% auf Zinsen stehen, um an Capital und Zinsen 800 Thlr. zu erhalten?

Gegeben: $C = 600$, $p = 5$, $C' = 800$, gesucht n. Nach Formel 4 ist:

$$n = \frac{100\,(800 - 600)}{5 \,.\, 600}$$

also: $n = 6\frac{2}{3}$ Jahre.

157.

Aufgabe. Jede der folgenden 8 Gleichungen auf x zu reduciren:

1. $ax = b + \frac{cx}{m}$;
2. $\frac{ax}{m} + \frac{bx}{n} - \frac{c}{a} = 0$;
3. $\frac{ax}{m} - 1 - \frac{bx}{n} + c = 0$;
4. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} + c$;
5. $c = a + \frac{a(a - x)}{a + x}$;
6. $\frac{mx - (c - x)n}{m(2x - c)} = 1$;
7. $\frac{a(dd + x)}{dx} = ac + \frac{a}{d}$;
8. $\frac{c}{a + bx} = \frac{h}{d + ex}$.

Auflösung. Es folgt aus:

1. $x = \frac{bm}{am - c}$;
2. $x = \frac{mnc}{a(an + bm)}$;
3. $x = \frac{mn(1 - c)}{an - bm}$;
4. $x = \frac{a + b + 1}{c}$;
5. $x = \frac{a(2a - c)}{c}$;
6. $x = c$;
7. $x = \frac{d}{c}$;
8. $x = \frac{cd - ah}{bh - ce}$.

Vierzehntes Buch.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren unbekannten Grössen.

158.

In allen Theilen der angewandten Mathematik und namentlich auch in allen Theilen der Naturwissenschaft, wo man nach Naturgesetzen forscht, kommen oftmals Fälle vor, wo mehrere unbekannte Grössen gesucht werden, deren Zusammenhang unter sich und mit den bekannten Grössen nicht durch eine, sondern durch mehrere zusammengehörige Gleichungen (Bedingungen) gegeben ist, aus welchen die unbekannten Grössen so bestimmt werden müssen, dass sie allen Gleichungen zugleich Genüge leisten.

Seien z. E. folgende drei zusammengehörige Gleichungen gegeben, mit der Aufgabe, die Werthe der darin vorkommenden unbekannten Grössen x, y, z so zu bestimmen, dass sie, substituirt, alle drei Bedingungen zugleich erfüllen:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z=14 \ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ 2x+5y-4z=1 \ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \\ 7x-2y+3z=25 \ldots\ldots\ldots\ldots & (3) \end{array}\right\}$$

Diese drei Gleichungen kann man sich aus einer Aufgabe, z. B. aus folgender entstanden denken: Es werden drei Zahlen von der Beschaffenheit gesucht, dass erstens, die Summe aller drei $=14$ ist; zweitens: das Zweifache der ersten, plus dem Fünffachen der zweiten, weniger dem Vierfachen der dritten soll $=1$ sein und drittens: das Siebenfache der ersten weniger dem Zweifachen der zweiten, plus dem Dreifachen der dritten soll $=25$ sein.

Diese drei zu erfüllenden Bedingungen sind, wenn die gesuchten Zahlen vorläufig mit x, y, z bezeichnet werden, durch obige drei Gleichungen dargestellt.

Um sich zuvor zu überzeugen, dass die Werthe, welche statt x, y, z gesetzt, wohl der einen oder der andern Gleichung Genüge leisten, deshalb aber noch nicht für alle passen, wollen wir einmal $x=5$, $y=3$, $z=6$ annehmen. Die Probe zeigt, dass diese Werthe wohl für die erste und auch für die zweite Gleichung passen, jedoch nicht die dritte Bedingung erfüllen und deshalb nicht die rechten sind.

Die Werthe von x, y, z, welche alle Bedingungen erfüllen, durch Versuche finden zu wollen, würde nicht allein einen grossen Zufall und Zeitverlust voraussetzen, sondern in vielen Fällen selbst unmöglich sein und man kommt deshalb auf den Gedanken: ob sich nicht ein allgemein anwendbares wissenschaftliches Verfahren erfinden lässt, nach welchem man aus mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit eben so vielen unbekannten Grössen, diese immer mit Sicherheit bestimmen kann.

Solche sichere Methoden giebt es allerdings mehrere, von denen wir jedoch nur folgende drei, als die gewöhnlichsten, mittheilen wollen. Der Anfänger aber möge erst selbst versuchen, ob er eine solche Methode angeben kann.

161.

Erste Methode. ***Elimination durch Substitution.*** Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x+y+z=14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x+5y-4z=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$7x-2y+3z=25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Wir schliessen nun so: da jede der drei unbekannten Grössen (z. B. x) in allen drei Gleichungen einerlei Werth hat, und dieser aus jeder der drei Gleichungen gefunden werden könnte, wenn die beiden andern (y, z) erst bekannt wären, so können wir eine der (dazu bequemsten) Gleichungen auf die eine unbekannte Grösse (x) reduciren und den für x erhaltenen Grössen-Ausdruck in die beiden andern Gleichungen anstatt x setzen (substituiren), wodurch x aus diesen beiden Gleichungen herausgeworfen (eliminirt) wird. Hiedurch erhalten wir also aus drei Gleichungen mit drei unbekannten Grössen, x, y, z, zwei neue Gleichungen mit nur zwei unbekannten Grössen, y, z.

Nach demselben Verfahren, welches man Elimination durch Substitution nennt, kann man aus den beiden neuen von x befreiten Gleichungen, indem man eine von ihnen wieder auf eine zweite unbekannte Grösse, z. B. auf y, reducirt und den für y erhaltenen Grössen-Ausdruck statt y in die andere substituirt, wieder eine neue Gleichung bilden, welche nur noch eine unbekannte Grösse, z, enthält; diese kann also berechnet werden, und durch Rückwärtssubstituiren findet man dann auch die beiden andern.

Aus der ersten Gleichung folgt nämlich:

$$x=14-y-z \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Setzen wir nun diesen für x erhaltenen Grössen-Ausdruck $14-y-z$ in die beiden andern Gleichungen (2) und (3) statt x, so wird durch diese Stellvertretung daraus x eliminirt, nämlich:

$$2(14-y-z)+5y-4z=1$$
$$7(14-y-z)-2y+3z=25$$

oder, indem man die Klammern auflöst und gleichnamige Glieder zusammenzieht &c., einfacher:

$$\left.\begin{array}{l} 3y-6z=-27 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 9y+4z=73 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}\right\}$$

Jetzt eine dieser beiden neuen Gleichungen, z. B. (4) auf y reducirt, kommt:

$$y=\frac{6z-27}{3}=2z-9 \ldots\ldots\ldots (4')$$

Diesen für y erhaltenen Ausdruck $2z-9$ statt y in (5) substituirt, kommt:

$$9(2z-9)+4z=73 \ldots\ldots\ldots (6)$$

Diese sogenannte Endgleichung auf z reducirt, giebt:

$$22z=154$$
$$\text{also: } z=7$$

Substituiren wir nun rückwärts diesen für z gefundenen Werth in (4′), so ist $y=2\cdot 7-9$ oder $y=5$. Endlich beide für z und y erhaltenen Werthe in (1′) substituirt, erhält man auch $x=2$. Es sind also:

$$x=2; \quad y=5; \quad z=7$$

die drei gesuchten Zahlen, welche die aufgestellten Bedingungen erfüllen.

162.

Es ist leicht einzusehen, dass die eben gezeigte Auflösungsmethode auf jede beliebige Anzahl Gleichungen mit eben so vielen unbekannten Grössen anwendbar ist. Hätte man z. B. sechs Gleichungen mit sechs unbekannten Grössen, x, y, z, t, v, w, so könnte man wieder eine derselben auf x reduciren, den für x erhaltenen Ausdruck in die übrigen fünf Gleichungen substituiren, dann eine dieser fünf neuen von x befreiten Gleichungen wieder auf eine andere unbekannte Grösse, y, reduciren, und den für y erhaltenen Ausdruck in die übrigen vier Gleichungen substituiren u. s. f., bis man auf die Endgleichung kommt, welche nur noch eine unbekannte Grösse enthält, und nachdem diese berechnet, findet man durch Rückwärtssubstituiren auch die übrigen. Auch wird dieses Verfahren nicht erschwert, sondern gerade umgekehrt erleichtert, wenn eine der unbekannten Grössen nicht in allen Gleichungen vorkommt. Alsdann wird es am bequemsten sein, diejenigen unbekannten Grössen, welche in den wenigsten Gleichungen enthalten sind, zuerst zu eliminiren. Seien z. E. die Werthe von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$3x-2v=13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2y+3v=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$5y-7z=25 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$3y-6z+5v=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die erste Gleichung auf x reducirt, giebt:

$$x = \frac{13+2v}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Wäre nun auch in einer der drei übrigen Gleichungen die unbekannte Grösse x enthalten, so würde man sie durch die Substitution des für dieselbe erhaltenen Ausdrucks (1') daraus eliminiren; da aber x in den übrigen nicht vorkommt, so fällt auch diese Arbeit weg. Man eliminire also aus den drei übrigen Gleichungen die Grösse z, weil diese nur in zwei Gleichungen vorkommt; die dritte Gleichung giebt:

$$z = \frac{5y-25}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

Diesen für z erhaltenen Ausdruck in die beiden übrigen substituirt (hier also bloss in (4), weil die zweite Gleichung kein z enthält und nur wieder abgeschrieben wird), kommt:

$$3y - 6\,\frac{(5y-25)}{7} + 5v = 0$$

oder ein wenig geordnet, den Nenner 7 fortgeschafft und die Klammer aufgelöst:

$$21y - 30y + 150 + 35v = 0$$

$$-9y + 35v = -150 \ldots\ldots (5)$$

hiezu die zweite Gleichung: $2y + 3v = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Aus (2) folgt:

$$y = \frac{1-3v}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

diesen für y erhaltenen Ausdruck in (5) substituirt, kommt die Endgleichung:

$$-9\left(\frac{1-3v}{2}\right) + 35v = -150 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

hieraus: $-9 + 27v + 70v = -300$

$$97v = -291$$

mithin: $v = -3$

Den Werth von v in (2') substituirt, kommt: $y = \frac{1-3(-3)}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$; den von y in (3') und den von v in (1') substituirt, kommt:

$$z = \frac{5.5-25}{7} = 0;\quad x = \frac{13+2.-3}{3} = 2\tfrac{1}{3}$$

Die gesuchten Werthe, welche die vier vorgeschriebenen Bedingungen zugleich erfüllen, sind also:

$$x = 2\tfrac{1}{3};\qquad y = 5;\qquad z = 0;\qquad v = -3.$$

163.

Zweite Methode. *Elimination durch Reduction.* Die gegebenen Gleichungen seien wieder:

$$(1)\quad x+y+z=14 \qquad x=14-y-z \ldots\ldots (1')$$

$$(2)\quad 2x+5y-4z=1 \qquad x=\frac{1-5y+4z}{2} \ldots\ldots (2')$$

$$(3)\quad 7x-2y+3z=25 \qquad x=\frac{25+2y-3z}{7} \ldots\ldots (3')$$

Man reducire, wie hier nebenstehend angedeutet, jede der gegebenen Gleichungen auf eine und dieselbe unbekannte Grösse, x. Da nun x in allen Gleichungen denselben Werth hat, so müssen auch alle drei für x erhaltenen Ausdrücke (1′), (2′), (3′) nothwendig einander gleich sein. Man kann sie also paarweise einander gleich setzen, den 1′sten dem 2′ten und den 1′sten dem 3′ten (oder auch den 2′ten dem 3′ten). Dadurch hat man also aus den drei gegebenen Gleichungen mit drei unbekannten Grössen, zwei neue Gleichungen, (4), (5), abgeleitet, welche nur noch zwei unbekannte enthalten, nämlich:

$$(4)\quad 14-y-z=\frac{1-5y+4z}{2} \qquad y=-9+2z \ldots (4')$$

$$(5)\quad 14-y-z=\frac{25+2y-3z}{7} \qquad y=\frac{73-4z}{9} \ldots\ldots (5')$$

Jede dieser beiden neuen Gleichungen reducire man wieder (wie nebenstehend angedeutet) auf eine andere unbekannte, y, und bilde aus den beiden für y erhaltenen und gleichwerthigen Ausdrücken die Endgleichung, nämlich:

$$(6)\quad -9+2z=\frac{73-4z}{9}$$

hieraus folgt $z=7$ und durch Rückwärtssubstituiren in (4′) und (1′), $y=5$ und $x=2$.

Hinsichtlich der allgemeinen Brauchbarkeit dieser Methode gelten offenbar dieselben Bemerkungen wie in § 162 und man kann z. B. auch nach dieser Methode die Werthe von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen bestimmen:

$$3x-2v=13 \qquad x=\frac{13+2v}{3} \ldots\ldots (1)$$

$$2y+3v=1 \qquad y=\frac{1-3v}{2} \ldots\ldots (2)$$

$$5y-7z=25 \qquad z=\frac{5y-25}{7} \ldots\ldots (3)$$

$$5v+3y-6z=0 \qquad z=\frac{3y+5v}{6} \ldots\ldots (4)$$

Die beiden Ausdrücke von z geben:

$$\frac{5y-25}{7}=\frac{3y+5v}{6}; \text{ hieraus } y=\frac{150+35v}{9} \ldots\ldots (5)$$

Die Ausdrücke für y aus (5) und (2) geben:

$$\frac{150+35v}{9}=\frac{1-3v}{2}; \text{ hieraus: } v=-3$$

den Werth von v in (1) und (2) substituirt, kommt $x=2\frac{1}{3}$, $y=5$; aus (3) folgt dann $z=0$.

164.

Dritte Methode. *Elimination durch Addition oder Subtraction.* Diese Methode ist im Allgemeinen die beste. Da die Werthe der unbekannten Grössen nicht verändert werden, wenn man alle Glieder einer Gleichung mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so kann man dadurch leicht bewirken, dass die zu eliminirende Grösse in zwei Gleichungen denselben Coefficienten bekommt. Ist dies aber der Fall, so braucht man offenbar nur die beiden Gleichungen von einander zu subtrahiren, wenn die gleichgemachten Coefficienten einerlei Vorzeichen haben; und zu einander zu addiren, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben; in dem einen oder andern Fall erhält man aus den beiden Gleichungen eine neue, welche die durch Addition oder Subtraction eliminirte Grösse nicht enthält. Eben so kann man mit je zwei andern Gleichungen, in welchen die zu eliminirende Grösse vorkommt, verfahren, und so aus n Gleichungen $n-1$ neue bilden, welche eine unbekannte Grösse weniger haben. Dasselbe Verfahren auf die erhaltenen $n-1$ Gleichungen angewandt, giebt $n-2$ Gleichungen &c., wie folgendes Beispiel zeigt:

$$x+y+z=14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x+5y-4z=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$7x-2y+3z=25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$-3y+6z=27 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$9y+4z=73 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$22z=154 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

also: $z=7$; $y=5$; $x=2$.

Um aus den drei gegebenen Gleichungen die zwei neuen von x befreiten (4) und (5) zu erhalten, verbinde man durch Subtraction die erste zuvor mit 2 multiplicirte Gleichung mit der zweiten, und dann wieder die erste zuvor mit 7 multiplicirte Gleichung mit der dritten. Diese leichten Rechnungen, welche wir hier noch andeuten wollen, lassen sich meistens leicht im Kopfe ausführen. Man hat nämlich die erste Gleichung mit 2 multiplicirt:

$$2x + 2y + 2z = 28 \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

subtr.: * $+2x + 5y - 4z = +1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$$- \quad - \quad + \quad -$$

kommt: $-3y + 6z = 27 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

Die erste mit 7 multiplicirte Gleichung giebt:

$$7x + 7y + 7z = 98 \ldots\ldots\ldots\ldots (1'')$$

subtr.: $7x - 2y + 3z = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$$- \quad + \quad - \quad -$$

$$9y + 4z = 73 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Man hätte auch, statt aus der ersten und dritten, aus der zweiten und dritten Gleichung eine neue von x befreite ableiten können, indem man, um x in (2) und (3) gleiche Coefficienten zu geben, die zweite mit 7 und die dritte mit 2 multiplicirt.

Um aus den beiden Gleichungen (4) und (5) eine neue von y befreite Gleichung zu erhalten, multiplicire man (damit y in beiden gleiche Coefficienten bekommt) die vierte (in Gedanken) mit 3 und addire sie dann (weil die Vorzeichen verschieden sind) zur fünften, so fällt y heraus und man erhält die Endgleichung (6).

Man hat (4) mit 3 multiplicirt:

$$-9y + 18z = 81 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

addirt: $9y + 4z = 73 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

$$22z = 154$$

Aus dieser Endgleichung folgt $z = 7$ und diesen Werth von z in (5) oder (4) substituirt $y = 5$; die Werthe von z und y in (1) gesetzt: $x = 2$.

Beispiel. Es seien die Werthe von x, y, z, v aus folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x - 2v = 13 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2y + 3v = 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 5y - 7z = 25 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ 3y - 6z + 5v = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}\right\}$$

Die unbekannte Grösse x kommt nur in einer Gleichung vor und kann daher nicht eliminirt werden. Weil nun y und v in drei,

* Beim Subtrahiren muss man den Subtrahendus mit umgekehrtem Vorzeichen dem Minuendus hinzufügen. Es ist nämlich (§ 140):

$$2x + 2y + 2z - (2x + 5y - 4z) = -3y + 6z.$$

z aber nur in zwei Gleichungen vorkommt, so ist es offenbar kürzer, erst z zu eliminiren. Man multiplicire also die dritte Gleichung mit 6 und die vierte mit 7, dadurch bekommt z in beiden Gleichungen gleiche Coefficienten ($6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42$) und weil diese einerlei Vorzeichen haben, so subtrahire man sie von einander, so kommt:

$$9y - 35v = 150 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\text{hiezu:} \quad 2y + 3v = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$97v = -291$$
$$v = -3$$

Den Werth von v in (2) und (1) substituirt &c., kommt:

$$x = 2\tfrac{1}{2}; \quad y = 5; \quad z = 0; \quad v = -3.$$

165.

Aufgabe. Die Werthe von x, y, z, v aus folgenden zusammengehörigen Gleichungen zu finden:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + v &= 16 \ldots\ldots (1) \\ -x + y + 2z + 3v &= 33 \ldots\ldots (2) \\ 2x + 5y + 5z - 6v &= 0 \ldots\ldots (3) \\ 3x + 4y - z - 2v &= -4 \ldots\ldots (4) \end{aligned}\right\}$$

Auflösung. Die Gleichungen (1) und (2) addirt, geben die fünfte; dann die zweite Gleichung mit 2 multiplicirt und zur dritten addirt, kommt die sechste; die zweite wieder mit 3 multiplicirt und zur vierten addirt, kommt die siebente neue Gleichung, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 2y + 3z + 4v &= 49 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ 7y + 9z \ldots\ldots &= 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ 7y + 5z + 7v &= 95 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7) \end{aligned}\right\}$$

Weil hier v nur in zwei Gleichungen vorkommt, so multiplicire man (5) mit 7 und (7) mit 4 und subtrahire, so kommt:

$$-14y + z = -37 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$
$$\text{hiezu:} \quad 7y + 9z = 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Jetzt die untere Gleichung mit 2 multiplicirt und dann zu (8) addirt, kommt die Endgleichung:

$$19z = 95$$
$$\text{also:} \quad z = 5; \quad y = 3; \quad v = 7; \quad x = 1.$$

166.

Wenn eine Gleichung nur eine unbekannte Grösse enthält, so kann man die dadurch völlig bestimmte Grösse daraus berechnen. Weil nun, wie im Vorhergehenden gezeigt, aus n Gleichungen mit n unbekannten Grössen allemal eine Endgleichung abgeleitet werden kann, welche nur *eine* der unbekannten und mithin *bestimmten* Grössen enthält, und dann durch Rückwärtssubstituiren auch jede der übrigen unbekannten Grössen durch eine Gleichung bestimmt und bekannt wird, so ist einleuchtend, dass die Werthe von n unbekannten Grössen

völlig bestimmt sind und immer gefunden werden können, wenn zu ihrer Bestimmung eben so viele von einander *unabhängige* und sich nicht *widersprechende* Gleichungen gegeben sind. Aus diesem Grunde nennt man auch alle Aufgaben *bestimmte*, wenn sich aus den Bedingungen derselben just so viele von einander unabhängige Gleichungen bilden lassen, als sie unbekannte Grössen zu finden verlangen.

Anmerkung. Bei Anwendung der gezeigten Eliminationsmethoden muss man immer *alle* Gleichungen berücksichtigen; denn hätte man z. B., statt wie in eben gelöster Aufgabe zu verfahren, die erste Gleichung mit der zweiten, die erste mit der dritten und dann die zweite wieder mit der dritten verbunden, mithin die vierte Gleichung ganz unberücksichtigt gelassen, so hätte man dadurch allerdings auch drei von x befreite Gleichungen erhalten, die dann aber weiter behandelt, auf eine *identische* Gleichung, d. h. auf eine solche führen müssen, die etwas schon Bekanntes sagt, nämlich: dass jede Grösse sich selbst gleich, oder das $0=0$ ist. Dieser Fall, wo man sich gleichsam im Kreise dreht, pflegt indessen bei verwickelten Untersuchungen selbst Geübteren zuzustossen.

167.

Wenn sich aber aus den Bedingungen einer Aufgabe *nicht* so viele Gleichungen bilden lassen, als unbekannte Grössen verlangt werden, so heisst die Aufgabe eine *unbestimmte*, und zwar aus dem Grunde, weil man dann den Bedingungen der Aufgabe oder den daraus gebildeten Gleichungen, auf mehr als eine, oftmals unzählig verschiedene Weise Genüge leisten kann. In diesem Fall bleiben nämlich so viele unbekannte Grössen unbestimmt, und daher willkürlich anzunehmen, als Gleichungen zu wenig sind.

Würde z. E. die Aufgabe gestellt, zwei, vorläufig mit x und y zu bezeichnende Zahlen zu finden, deren Summe 12 ist, so lässt sich aus der Bedingung dieser Aufgabe nur eine einzige Gleichung bilden, nämlich:

$$x+y=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{woraus: } x=12-y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

Man sieht also, dass eine der beiden Grössen, z. B. x, nicht eher gefunden werden kann, als bis die andere, y, bekannt ist. Da nun y durch keine Gleichung gegeben ist, so bleibt nichts übrig, als den Werth derselben willkürlich anzunehmen. Nimmt man z. B. $y=1$, so wird $x=11$; für $y=2$ ist $x=10$; $y=3$, $x=9$, $y=-2$, $x=14$; $y=\frac{1}{2}$, $x=11\frac{1}{2}$ &c. &c. und je zwei dieser Werthe müssen der Gleichung (1) Genüge leisten.

Sucht man die vier Werthe, welche folgenden zwei Gleichungen Genüge leisten

$$\left.\begin{aligned} 4x-3y-4z&=12 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 4x+\ y-8v&=48 \ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}\right\} \quad x=\frac{12+3y+4z}{4} \ldots\ldots\ldots (1')$$

so kann man (die erste von der zweiten subtrahirt) daraus nur eine einzige Gleichung ableiten, in welcher zwei Grössen unbestimmt bleiben und beliebig angenommen werden müssen, nämlich:

$$4y-8v+4z=36$$

$$\text{woraus: } y=9+2v-z$$

Nimmt man z. B. $z=1$, $v=2$; so wird $y=12$ und $x=13$; für $z=1$, $v=1$ wird $y=10$ und $x=11\frac{1}{2}$ &c. &c. Je vier solcher zusammengehörigen Werthe leisten den beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge.

Die Theorie über die unbestimmten (sogenannten Diophantischen) Aufgaben, welche mit der Theorie über Eigenschaften der Zahlen und andern, sehr tiefsinnigen Untersuchungen zusammenhängt, ist von einem sehr grossen Umfange

und deshalb in eigenen Werken darüber zu studiren. *Gauss*, disquisitiones arithmeticae, oder die franz. Uebersetzung: Recherches arithmétiques de *Gauss*, traduites par *Poulet de Lisle; Legendre*, théorie des nombres. Wir müssen uns hier auf die bestimmten Aufgaben beschränken. Hiebei ist jedoch noch zu bemerken, dass die Gleichungen von einander unabhängig, d. h. so beschaffen sein müssen, das keine derselben durch arithmetische Operationen aus den übrigen abgeleitet werden kann. So sind z. E. die beiden Gleichungen:

$$x + y = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + 2y = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

von einander abhängig, weil die zweite aus der ersten (indem man die erste mit 2 multiplicirt) abgeleitet werden kann. Beide Gleichungen (Bedingungen) bilden nur eine. Denn dieselben Werthe, welche die Bedingung der ersten erfüllen, müssen nothwendig auch, der Abhängigkeit wegen, die in der ersten Bedingung schon enthaltene zweite Bedingung erfüllen. Eben so sind die drei folgenden Gleichungen von einander abhängig:

$$2x - 3y = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$5x - 12y - 5z = 47 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$3x + 5z = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Die dritte Gleichung ist schon in den beiden ersten enthalten. Man kann sie daraus ableiten, wenn man die erste mit 4 multiplicirt und dann die zweite subtrahirt. Die drei Gleichungen können also nur für zwei gerechnet werden, welche, da sie drei unbekannte Grössen enthalten, zu den unbestimmten Aufgaben gehören — Die Abhängigkeit der Gleichungen liegt manchmal sehr versteckt, indessen entdeckt man sie, wenn auch nicht eher, doch immer am Ende der Rechnung durch die Endgleichung, welche dann mehr unbekannte Grössen enthält, als wenn die Gleichungen unabhängig wären.

Ferner ist klar, dass, wenn eine Aufgabe bestimmt sein soll, die daraus gebildeten Gleichungen nichts Widersprechendes enthalten dürfen. So enthalten z. E. die beiden Gleichungen:

$$2x + 3y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x + 3y = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

einen Widerspruch, weil eine und dieselbe zweitheilige Grösse $2x + 3y$ nicht zu gleicher Zeit 5 und auch 17 sein kann.

Schliesslich bemerken wir noch, dass es Fälle giebt, wo viel mehr Bedingungs-Gleichungen vorhanden sind. als unbekannte Grössen gesucht werden. Diese Fälle gehören aber, wenn auch gleich in practischer Hinsicht zu einem der wichtigsten und nützlichsten, doch auch zu den schwierigsten Theilen der höheren Mathematik (Wahrscheinlichkeitsrechnung) und können also schon deshalb hier nicht weiter zur Sprache gebracht werden.

168.

Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 12 und deren Differenz 6 ist.

Auflösung. Bezeichnet man die beiden unbekannten Zahlen mit x und y, so geben die Bedingungen der Aufgabe die beiden folgenden Gleichungen, welche zugleich Statt finden sollen:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{array}\right\}$$

(1) und (2) addirt kommt: $2x = 18$, mithin $x = 9$

(2) von (1) subtr. kommt: $2y = 6$, mithin $y = 3$

Anmerkung. Die Aufgabe, aus der bekannten Summe und Differenz zweier unbekannten Grössen die Grössen selbst zu finden, kommt oft vor. Man merke sich, dass die eine Grösse dann immer gleich ist der halben bekannten Summe *plus* der halben Differenz und die andere = der halben Summe weniger der halben Differenz. Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes lässt sich in allgemeinen Zeichen leicht anschaulich machen. Bezeichnet man nämlich die bekannte Summe der beiden unbekannten Grössen x und y allgemein durch s, und die bekannte Differenz derselben allgemein mit d, so hat man:

$$x + y = s \dots\dots (1)$$
$$x - y = d \dots\dots (2)$$

(1) und (2) addirt, kommt: $2x = s + d$; mithin: $x = \frac{s + d}{2}$

(2) von (1) subtr., kommt: $2y = s - d$; also: $y = \frac{s - d}{2}$

169.

Aufgabe. Jemand hat zwei Haufen Thaler. Legt er 10 Stück vom zweiten zum ersten, so enthält dieser grade halb so viel, als noch im zweiten bleiben. Legt er aber 30 Stück vom ersten zum zweiten, so enthält der zweite grade 6mal so viel, als noch im ersten bleiben. Wie viel sind in jedem?

Auflösung. Der erste enthalte x, der zweite y. Nimmt man 10 Stück vom zweiten zum ersten, so bleiben im zweiten $y - 10$, und im erten sind dann: $x + 10$, und da der erste jetzt halb so viel enthalten soll, so hat man: $x + 10 = \frac{y - 10}{2}$. Nimmt man 30 Stück vom ersten zum zweiten, so sind im ersten $x - 30$, im zweiten $y + 30$, und da nun der zweite 6mal so viel enthalten soll, so hat man $y + 30 = 6(x - 30)$. Um auf diese beiden Gleichungen die dritte Eliminationsmethode anzuwenden, muss man sie erst ein wenig bequemer dazu einrichten, nämlich: die Klammer auflösen, Nenner fortschaffen und sie dann so stellen, dass gleichnamige Grössen auf einerlei Seite untereinander zu stehen kommen. Die beiden Gleichungen:

$$x + 10 = \frac{y - 10}{2} \dots\dots (1)$$
$$y + 30 = 6(x - 30) \dots\dots (2)$$

stehen nämlich geordnet so:

$$2x - y = -30 \dots\dots (1')$$
$$6x - y = 210 \dots\dots (2')$$

(1') von (2') subtrahirt, kommt:

$$4x = 240, \text{ also: } x = 60$$

(1') mit 3 multiplicirt und dann von (2') subtrahirt, kommt:

$$2y = 300, \text{ also: } y = 150.$$

170.

Aufgabe. Es giebt einen Bruch, der sich, wenn man von Zähler und Nenner 1 subtrahirt in $\frac{1}{3}$, und wenn man zum Zähler und Nenner 4 addirt, in $\frac{1}{2}$ verwandelt; welcher ist's?

Auflösung. Sei x der Zähler und y der Nenner, mithin $\frac{x}{y}$ der unbekannte Bruch, so hat man laut Bedingung:

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Reducirt man beide Gleichungen auf x, indem man zuvor durch Multiplication die Nenner $y-1$ und $y+4$ fortschafft, so folgt:

$$(1') \quad x-1=\frac{y-1}{5} \qquad x=\frac{y-1}{5}+1$$

$$(2) \quad x+4=\frac{2y+8}{5} \qquad x=\frac{2y+8}{5}-4$$

$$\frac{2y+8}{5}-4=\frac{y-1}{5}+1$$

hieraus: $y=16$

folglich: $x=4$

mithin der gesuchte Bruch $\frac{x}{y}=\frac{4}{16}$

171.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren, A, B, C, gefüllt werden, und zwar in 10 Minuten, wenn nur A und B, in 20 Minuten, wenn B und C, und in 15 Minuten, wenn A und C zugleich geöffnet werden. Wie viel Zeit wird jede einzelne Röhre und wie viel werden alle, zugleich geöffnet, zur Füllung des Behälters nöthig haben?

Auflösung. Man setze die Quantität des Wassers im Behälter $=1$ (z. B. 1 Oxhoft, 1 Tonne &c.). Da A und B dies in 10 Minuten geben, so geben sie in einer Minute $\frac{1}{10}$ desselben, ebenso geben B und C zusammen $\frac{1}{20}$ und A und C zusammen $\frac{1}{15}$ in einer Minute. Nennt man nun die Zeiten, welche A, B, C einzeln zur Füllung gebrauchen x, y, z, so giebt A, $\frac{1}{x}$; B, $\frac{1}{y}$ und C, $\frac{1}{z}$ und folglich A und B zusammen $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, B und C zusammen $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ und A und C zusammen $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$ in einer Minute. Mithin ist:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Da hier die unbekannten Grössen *alle* als Nenner vorkommen, so ist es offenbar bequemer, statt die Gleichungen erst von diesen Nennern zu befreien,

geradezu die Werthe der Brüche $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, für welche man während der Rechnung auch andere einfachere Zeichen, wie etwa x', y', z', substituiren könnte, zu bestimmen, woraus dann durch blosse Umkehrung der Brüche die Werthe von x, y, z folgen. Man hat sogleich:

$$(2) \text{ von } (1) \text{ subtr.: } \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$(3) \text{ und } (4) \text{ addirt: } 2 . \frac{1}{x} = \frac{7}{60}$$

$$\text{woraus: } \frac{1}{x} = \frac{7}{120}$$

den Werth von $\frac{1}{x}$ in (1) und (4) substituirt, kommt:

$$\frac{1}{y} = \frac{5}{120}; \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{120}$$

$$\text{mithin ist: } x = 17\tfrac{1}{7}; \quad y = 24; \quad z = 120.$$

Alle drei Röhren zugleich geöffnet, geben also in einer Minute $\frac{7}{120} + \frac{5}{120} + \frac{1}{120} = \frac{13}{120}$, mithin brauchen sie zur Füllung des ganzen Fasses $1 : \frac{13}{120} = 9\frac{3}{13}$ Minuten.

172.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter kann durch die beiden Röhren A und B in a Minuten, durch B und C in b Minuten, durch A und C in c Minuten gefüllt werden. Man sucht die Formeln, nach welchen man die Zeiten berechnen kann, welche jede einzelne, und alle Röhren zur Füllung nöthig haben?

Auflösung. Seien x, y, z die Zeiten, welche jede einzelne Röhre gebraucht, so hat man:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(2) \text{ von } (1) \text{ subtr., kommt: } \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$(3) + (4) \text{ kommt: } 2 . \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc - ac}{abc}$$

$$\text{folglich: } \frac{1}{x} = \frac{ab + bc - ac}{2abc}; \qquad \frac{1}{y} = \frac{ac + bc - ab}{2abc}; \qquad \frac{1}{z} = \frac{ab + ac - bc}{2abc}.$$

Mithin ist:

$$x = \frac{2abc}{ab + bc - ac}; \qquad y = \frac{2abc}{ac + bc - ab}; \qquad z = \frac{2abc}{ab + ac - bc}.$$

Die Zeit, welche alle drei Röhren zur Füllung gebrauchen, ist also:

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

oder wenn man in diesen Ausdruck die für $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ gefundenen Werthe substituirt und gehörig reducirt:

$$= \frac{2abc}{ab + ac + bc}$$

173.

Aufgabe. Aus folgenden beiden Gleichungen die Werthe von x, y durch die Grössen a, b, c, m, n ausgedrückt, zu finden:

$$\frac{xy}{ax + by} = m \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{3xy}{cx - by} = n \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Auflösung. Man reducire beide Gleichungen auf x, indem man zuvor die Nenner fortschafft. Aus (1) folgt:

$$xy = amx + bmy$$
$$xy - amx = bmy$$
$$(y - am)x = bmy$$
$$\text{also:} \quad x = \frac{bmy}{y - am} \quad \dots\dots\dots\dots (1')$$

Aus (2) folgt:

$$3xy = cnx - bny$$
$$3xy - cnx = -bny$$
$$(3y - cn)x = -bny$$
$$x = \frac{-bny}{3y - cn}$$

Die beiden für x erhaltenen Grössen geben:

$$\frac{bmy}{y - am} = \frac{-bny}{3y - cn} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

Auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Factor by dividirt, kommt:

$$\frac{m}{y - am} = \frac{-n}{3y - cn}$$

mit dem allgemeinen Nenner $(y - am)(3y - cn)$ multiplicirt, kommt:

$$3my - cmn = -ny + amn$$
$$3my + ny = amn + cmn$$
$$(3m + n)y = mn(a + c)$$
$$y = \frac{mn(a + c)}{3m + n}$$

Diesen Werth von y in (1') substituirt, kommt:

$$x=\frac{bm.\frac{mn(a+c)}{3m+n}}{\frac{mn(a+c)}{3m+n}-am}=\frac{\frac{bmmn(a+c)}{3m+n}}{\frac{mn(a+c)-(3m+n)am}{3m+n}}$$

$$x=\frac{bmmn(a+c)}{mn(a+c)-(3m+n)am}=\frac{bmn(a+c)}{an+cn-3am-an}$$

Die gesuchten Werthe von x und y sind also:

$$x=\frac{bmn(a+c)}{cn-3am}$$

$$y=\frac{mn(a+c)}{n+3m}$$

174.

Aufgabe. Aus folgenden beiden Gleichungen die durch a, b, c, d, m, n bestimmten Werthe von x und y zu finden:

$$ax+by=c \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$mx-ny=d \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Multiplicire (1) mit n und (2) mit b, und addire dann die beiden Gleichungen, nämlich:

$$anx+bny=cn \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$
$$bmx-bny=bd \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$
$$(1')+(2');\; anx+bmx=cn+bd$$
$$(an+bm)x=cn+bd$$
$$\text{mithin:}\quad x=\frac{cn+bd}{an+bm}$$

Ferner, die Gleichung (1) mit m und (2) mit a multiplicirt und dann subtrahirt, kommt:

$$bmy+any=cm-ad$$
$$\text{woraus:}\quad y=\frac{cm-ad}{an+bm}$$

Fünfzehntes Buch.

Vorläufige Begriffe von den Potenzen und Wurzeln. Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzel.

175.

Wenn eine Zahl mehrmals mit sich selbst multiplicirt werden soll, so wird dies kurz dadurch angedeutet, dass man die Zahl nur einmal hinschreibt und oben rechts und etwas kleiner geschrieben diejenige Zahl setzt, welche angiebt, wie oft die unter ihr stehende Grundzahl als Factor zu setzen ist.

Soll z. E. die Zahl 7 fünfmal als Factor gesetzt werden, so schreibt man statt $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ kürzer: 7^5. Hiernach bedeutet also 3^3 so viel als $3 \cdot 3 \cdot 3$; $a^4 = aaaa$. Allgemein: a^n dass a $n$mal als Factor zu setzen ist.

176.

Jeder solcher Ausdruck wie 7^5, 3^3, a^4, a^n &c., so wie auch jedes aus gleichen Factoren entwickelte Product heisst, in Beziehung auf die mehrmals als Factor gesetzte Zahl, eine Potenz derselben. Die Zahl selbst hingegen heisst die Wurzel der Potenz, und die Zahl, welche angiebt, wie oft die Wurzel als Factor zu setzen ist, der Exponent der Potenz. In dem Ausdruck 2^3 ist also 2 die Wurzel, 3 der Exponent und 2^3 oder das wirklich entwickelte Product $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ die Potenz. Man muss also Exponenten wohl von Coefficienten unterscheiden. So ist z. B.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, \text{ aber } 3 \cdot a = a + a + a.$$

177.

Potenzen von verschiedenen Wurzeln und Exponenten können, entwickelt, einerlei Grösse geben. Es ist z. B. $2^6 = 8^2 = 4^3 = 64$; $3^4 = 9^2 = 81$. Man benennt daher die Potenzen nach ihrer Wurzel und dem Grade ihres Exponenten. So ist z. B. 64 die 6te Potenz von 2, die 2te Potenz von 8, die 3te Potenz von 4; eben so ist 81 die 4te Potenz von 3, oder die 2te Potenz von 9 &c. Allgemein: a^n lies: a erhoben zur $n$ten Potenz, oder kurz: a, $n$te Potenz; 7^5 lies: 7, 5te Potenz.

Eben so benennt man auch die Wurzeln nach Graden, und man versteht unter *n*te Wurzel aus einer Zahl, *a*, eine solche Grösse, welche, auf die *n*te Potenz erhoben, die Zahl *a* wiedergiebt. So ist z. B. 2 die 6te Wurzel aus 64, weil $2^6 = 64$. Eben so ist 8 die 2te und 4 die 3te Wurzel aus 64.

178.

Um kurz anzudeuten, dass aus einer Grösse eine Wurzel ausgezogen werden soll, setzt man vor die Grösse das aus dem Anfangsbuchstaben *r* des Wortes *radix* (Wurzel) entstandene Zeichen: $\sqrt{}$, und in dessen Oeffnung den sogenannten Wurzelexponenten, d. i., diejenige Zahl, welche den Grad der auszuziehenden Wurzel angiebt. Wird z. B. die dritte Wurzel aus 64 verlangt, so deutet $\sqrt[3]{64}$ diese Forderung an. Eben so heisst $\sqrt[6]{64}$ die 6te Wurzel aus 64. Allgemein: $\sqrt[n]{a}$ heisst die *n*te Wurzel aus *a*. Erhebung zur Potenz und Ausziehung der Wurzel sind offenbar entgegengesetzte Operationen und können sich daher zur gegenseitigen Probe dienen. So ist z. B. $2^3 = 8$ und umgekehrt $\sqrt[3]{8} = 2$. Eben so ist $\sqrt[4]{81} = 3$. weil $3^4 = 81$.

179.

Die 2te Potenz einer Grösse nennt man gewöhnlich das Quadrat und die 3te Potenz den Cubus derselben, und umgekehrt heisst die 2te Wurzel aus einer Grösse Quadratwurzel oder kurz Wurzel. Die 3te Wurzel aus einer Grösse heisst Cubicwurzel. Diese für die Arithmetik unnöthigen und bedeutungslosen Kunstwörter sind aus der Geometrie entlehnt.

Statt des Potenzexponenten 2 findet man bei den meisten Classikern die Grösse zweimal als Factor gesetzt, z. B. *aa* statt a^2 (lies: *a*, *quadrat*). Eben so ist es nicht üblich, den Wurzelexponenten 2 zu schreiben. Statt $\sqrt[2]{9}$, $\sqrt[2]{25}$, $\sqrt[2]{a}$ &c. schreibt man kurz: $\sqrt{9}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{a}$.

180.

Jede Potenz von 1 ist $= 1$. So ist z. B. $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1^4 = 1$; allgemein: $1^n = 1$.

Umgekehrt ist auch jede Wurzel aus $1 = 1$, z. B. $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[4]{1} = 1$. Allgemein: $\sqrt[n]{1} = 1$.

181.

1) Um einen Bruch zu potentiiren, muss man sowohl Zähler als Nenner, jeden besonders, auf die verlangte Potenz erheben. So ist z. B.:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$; denn $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$; denn $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$; denn $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$; $\left(1\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$

Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

2) Umgekehrt muss auch die Wurzel aus einem Bruche aus Zähler und Nenner besonders gezogen werden. So ist z. B.:

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$;

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$;

$\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$; $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

182.

Auf je höhere Potenzen man einen **ächten** Bruch erhebt, je kleiner werden diese. So ist z. B. $(\frac{2}{3})^4 < (\frac{2}{3})^2$.

Umgekehrt aber, je höhere Wurzeln man aus einem ächten Bruche zieht, je **grösser** werden diese. So ist z. B.:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} > \sqrt[2]{\frac{16}{81}}$$

Hingegen ist leicht einzusehen, dass die Potenzen von Zahlen > 1, immer grösser, die höheren Wurzeln daraus immer kleiner werden. Ferner: dass, weil jede Wurzel aus $1 = 1$ ist, jede Wurzel aus einer Zahl > 1 auch > 1 sein muss; z. B. $\sqrt[100]{2} > 1$; $\sqrt[n]{2} > 1$.

183.

Wenn man einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen gegen einander sind, wie $\frac{4}{9}$ oder $\frac{9}{4}$ auf eine beliebige Potenz erhebt, so ist die Potenz wieder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner ebenfalls Primzahlen gegen einander sind, und der sich daher nicht weiter abkürzen lässt. (§ 319.)

Wie oft man also auch eine gemischte Zahl, wie $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{5}$, oder die dafür gesetzten Brüche $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{8}{5}$ &c. mit sich selbst multiplicirt, nie kann die dadurch entstehende Potenz eine reine, ganze Zahl geben. Man hat z. B.:

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5\tfrac{1}{16}$$

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{729}{64} = 11\tfrac{25}{64}$$

$$\left(2\tfrac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \frac{6561}{256} = 25\tfrac{161}{256}$$

184.

Wenn also eine Wurzel aus einer ganzen Zahl keine reine, ganze Zahl ist, so ist sie auch keine gemischte Zahl und mithin gar nicht vorhanden. So ist z. B. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ und die Quadratwurzeln aus den zwischen 4 und 9 liegenden Zahlen müssten also, wenn sie möglich wären, zwischen 2 und 3 fallen, mithin gemischte Zahlen sein. Nun kann aber nach vorhergehendem § keine gemischte Zahl mit sich selbst multiplicirt, eine reine ganze Zahl, wie 5, 6, 7, 8, geben. Folglich ist auch strenge genommen, aus diesen Zahlen keine Quadratwurzel möglich. Ferner, da $\sqrt[3]{8} = 2$ und $\sqrt[3]{27} = 3$ ist, so sind auch die Cubicwurzeln aus den zwischen 8 und 27 fallenden Zahlen unmöglich, weil sie sonst > 2 und < 3, folglich gemischte Zahlen sein müssten, diese aber auf die dritte Potenz erhoben, keine ganze Zahl wiedergeben können.

185.

Alle solche nicht durch Zahlen darstellbare Wurzeln, wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ..., $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ..., $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$ ... &c. heissen daher irrationale oder incommensurabele Grössen, im Gegensatz der wenigen übrigen durch Zahlen darstellbaren Wurzeln, wie $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{\tfrac{1}{9}}$,

$\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt[3]{8}$ &c., welche man **rationale** (commensurabele) Grössen nennt. So ist z. B. $\sqrt{\frac{81}{16}}$ eine rationale Grösse, indem sie mit der Bruch-Einheit $\frac{1}{4}$, welche gerade 9 mal darin enthalten ist, völlig genau ausgemessen und mithin das Verhältniss (ratio) derselben zur Einheit durch Zahlen völlig genau dargestellt werden kann. Weil nämlich $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$, so verhält sich auch 1 zu $\sqrt{\frac{81}{16}}$, wie 1 zu $\frac{9}{4}$.

185.

Obgleich nun die irrationalen Grössen, wie $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$ &c. sich mit **keinem** Theil der Einheit, theoretisch genommen, völlig genau ausmessen lassen, so kann man doch mit Hülfe der Decimalbrüche einen so grossen Theil davon ausmessen, als für die Praxis nur immer erforderlich ist, oder dass der an der wahren Wurzel noch fehlende Theil für die Sinne verschwindet. Multiplicirt man z. B. die um kein zehn Milliontel verschiedenen Grössen 2·44949 und 2·44948999··· mit sich selbst, so kommt:

$$(2{,}44949)^2 = 6{,}000001\cdots$$
$$(2{,}44948999)^2 = 5{,}9999999\cdots$$

Das erste Quadrat ist um kein Milliontel, das zweite um noch viel weniger, von der Zahl 6 verschieden. Und wenn nun auch, streng genommen, keine Zahl möglich ist, die mit sich selbst multiplicirt, genau die Zahl 6 gäbe, so kann man doch in der Praxis die Zahl 2,44949 oder genauer 2,449489··· als die Quadratwurzel aus 6 betrachten. Selten wird man mehr Decimalen, deren man übrigens nach § 192 leicht beliebig viele finden kann, nöthig haben. Es ist also näherungsweise

$$\sqrt{6} = 2{,}4495, \text{ oder genauer: } \sqrt{6} = 2{,}4494899\cdots$$

Wie man übrigens mit Hülfe der Logarithmen diese Decimalen findet, und überhaupt jede beliebige Potenz von einer Grösse bildet, und umgekehrt, jede Wurzel beliebigen Grades ungemein leicht daraus ziehen kann, kann erst im 20. Buche gezeigt werden. Hier müssen wir zuerst das sehr umständliche Verfahren mittheilen, nach welchem man aus einer vorgegebenen Zahl die Quadrat- und Cubicwurzel ziehen kann. Und wenn auch der, der es bis zum 21. Buche bringt, wegen der dort gezeigten, tausendmal bequemern Methode, von diesem Verfahren selten Gebrauch machen wird, so ist es doch erforderlich, sich wenigstens mit der Ausziehung der Quadratwurzel bekannt zu machen. Zuvor merke man sich deshalb folgende vier Hülfssätze.

186.

Wenn man eine aus zwei Theilen bestehende Grösse, wovon der erste allgemein a, der zweite b, und also die zweitheilige Grösse

selbst $a+b$ heissen mag, in's Quadrat erhebt, so enthält das daraus entstehende Quadrat, wie nebenstehende Multiplication lehrt, drei Theile, nämlich: das Quadrat des ersten Theils, das doppelte Product aus dem ersten und zweiten Theil und das Quadrat des zweiten Theils.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \end{array}$$

Diese kleine Formel, so wie sie hier in Worten und Zeichen ausgesprochen ist, muss man im Gedächtniss behalten, um darnach das Quadrat einer jeden andern zweitheiligen Grösse, ohne es, wie oben, durch wirkliche Multiplication zu suchen, gleich aus dem Gedächtnisse niederschreiben zu können; z. B.

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2; \qquad (70+6)^2=4900+840+36.$$

187.

Um eine Zahl, welche auf Nullen endigt, auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur die bedeutlichen Ziffern auf die verlangte Potenz zu bringen und derselben die Anzahl Nullen so viel mal anzuhängen, als der Exponent Einheiten hat. So ist z. B.

$$800^2=640000; \qquad 200^3=8000000; \qquad 1000^2=1000000.$$

188.

Das Quadrat einer jeden beliebig vielziffrigen Zahl muss entweder zweimal so viel Ziffern haben, als die Wurzel, oder zweimal so viel, weniger eine Ziffer. Das Quadrat einer jeden fünfziffrigen Zahl, z. B. von 33592, muss entweder $2\cdot5=10$ Ziffern, oder $2\cdot5-1=9$ Ziffern haben, denn es fällt zwischen die Quadrate der beiden kleinsten fünf- und sechsziffrigen Zahlen 10000 und 100000. Nun wird aber das Quadrat der kleinsten fünfziffrigen Zahl (10000^2) mit ein und zweimal vier Nullen, also mit 9 Ziffern und das Quadrat von der kleinsten sechsziffrigen Zahl (100000^2) mit ein und zweimal 5 Nullen, also mit 11 Ziffern, geschrieben.

Die Quadrate aller einziffrigen Zahlen und umgekehrt die rationalen Wurzeln aus allen ein- und zweiziffrigen Zahlen liegen im Einmaleins und können daher als bekannt vorausgesetzt werden.

189.

Wenn eine vollkommene Quadratzahl, rückwärts durchlaufen, in Classen von je zwei Ziffern getheilt wird (die erste, links stehende Classe kann aber auch nur eine Ziffer bekommen), so muss die Quadratwurzel aus dieser Zahl just so viele Ziffern haben, als Classen

vorhanden sind, und die erste Ziffer der Wurzel muss die grösstmöglichste einziffrige Wurzel aus der ersten Classe sein. Die Quadratwurzel aus 80945678 z. B. muss vier Ziffern haben, und die erste muss 8 sein. Denn diese Zahl giebt eingetheilt vier Classen und 8 ist die grösstmöglichste Wurzel aus 80:

$$81|00|00|00 = 9000^2$$
$$80|94|56|78 = (8xyz)^2 \quad (\S\ 187)$$
$$64|00|00|00 = 8000^2$$

Die Quadratwurzel aus 80945678 fällt also zwischen 8000 und 9000; indem 8000 zu klein und 9000 zu gross ist. Um nun aber auch die folgenden zweite, dritte und vierte hier durch x, y, z angedeuteten Ziffern nach bestimmten Regeln finden zu können, müssen wir erst das Gesetz aufsuchen, nach welchem sich das Quadrat von einer gegebenen Wurzel bildet, und namentlich darauf achten, wie die erste Ziffer und die zweite, die beiden ersten und die dritte, die drei ersten und die vierte &c. dazu beitragen, um dann rückwärts aus den bekannten anfänglichen Ziffern der Wurzeln die folgende unbekannte ableiten zu können.

190.

Erhebt man beliebige zwei-, drei-, vierziffrige Wurzeln, z. B. 76, 764, 7643, in's Quadrat, indem man der grössern Anschauung wegen die letzte Ziffer von den übrigen trennt, mithin die Wurzeln als zweitheilige Grössen ausdrückt, nämlich:

$$76^2 = (70+6)^2; \quad 764^2 = (760+4)^2; \quad 7643^2 = (7640+3)^2$$

Entwickeln wir die Quadrate nach der Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und stellen dann die drei Theile derselben, wie bei No. 1, 2, 3 geordnet, unter einander, so lehrt die Anschauung: dass, wenn die Wurzel zwei Ziffern hat (No. 1), das Quadrat der ersten Ziffer ganz in der ersten Classe liegt, das doppelte Product aus der ersten und zweiten Ziffer sich bis in die erste Ziffer der zweiten Classe erstreckt und das Quadrat der zweiten Ziffer ganz in der zweiten Classe liegt. Ferner, dass (No. 2) das Quadrat der beiden ersten Ziffern der Wurzel in die beiden ersten Classen fällt, das doppelte Product derselben mit der dritten multiplicirt, sich bis in die erste Ziffer der dritten Classe erstreckt und das Quadrat der dritten Ziffer in der dritten Classe liegt &c. Kurz: das die n ersten Classen einer Zahl kein grösseres Quadrat enthalten können, als das von den n ersten Ziffern der Wurzel, und mithin auch umgekehrt, die grösstmöglichste Quadratwurzel aus den n ersten Classen gezogen, die n ersten Ziffern der gesuchten Wurzel sind.

No. 1.		No. 2.		No. 3.	
$(\overset{a}{70} + \overset{b}{6})^2$		$(\overset{a}{760} + \overset{b}{4})^2$		$(\overset{a}{7640} + \overset{b}{3})^2$	
$a^2 = 49$	$\dot{0}\dot{0}$	$a^2 = 5776$	$\dot{0}\dot{0}$	$a^2 = 583696$	$\dot{0}\dot{0}$
$2ab = 8$	$4\dot{0}$	$2ab = 60$	$8\dot{0}$	$2ab = 458$	$4\dot{0}$
$b^2 =$	36	$b^2 =$	16	$b^2 =$	9
$76^2 = 57$	76	$764^2 = 58\vert 36$	96	$7643^2 = 58\vert 41\vert 54$	49

191.

Aus dem vorstehenden § fliessen nun folgende Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel:

1) Man theile die Zahl, aus welcher eine Quadratwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke in Classen von je zwei Ziffern; setze als erste Ziffer (a) der Wurzel, die grösstmöglichste (einziffrige) Wurzel aus der ersten Classe und subtrahire deren Quadrat No. 1 und No. 2.

No. 1)

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{57|76} = & \overset{ab}{76}: \\
a^2 = 49 & :: \\
2a = 14)\ \overline{87} & : \\
2a\cdot b = 84 & : \\
\overline{36} & \\
b^2 = 36 &
\end{array}
$$

No. 2)

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{58|36|96} = & \overset{a}{\overbrace{ab}}b = 764 \\
a^2 = 49 & :::: \\
2a = 14)\ \overline{93} & ::: \\
2a\cdot b = 84 & ::: \\
\overline{96} & :: \\
b^2 = 36 & :: \\
2a = 152)\ \overline{609} & : \\
2a\cdot b = 608 & : \\
\overline{16} & \\
b^2 = 16 &
\end{array}
$$

2) Zu dem bleibenden Reste setze die erste Ziffer der folgenden Classe, dividire hierin mit dem Doppelten der gefundenen ersten Ziffer der Wurzel ($2a$), setze den Quotienten (b) als zweite Ziffer derselben und multiplicire mit ihm das Doppelte der ersten und subtrahire das Product ($2ab$).

3) Zu dem Reste setze die zweite Ziffer der zweiten Classe und subtrahire das Quadrat der zweiten Ziffer der Wurzel (b^2).

Sind nun noch mehrere Classen vorhanden, so braucht man nur die vorhergehenden Regeln 2. und 3. zu wiederholen, nämlich:

4. Setze zu dem etwa bleibenden Reste die erste Ziffer der dritten Classe, dividire hierin mit dem Doppelten der beiden gefundenen ersten Ziffern der Wurzel (welche man als den bekannt

gewordenen ersten Theil a derselben ansieht), so ist der Quotient die dritte Ziffer der Wurzel, mit welcher man wie vorhin mit der zweiten verfährt, und so weiter bis zur letzten Classe.

Um eine folgende Ziffer in der Wurzel zu finden, muss man immer mit dem Doppelten der vorhergehenden dividiren, hier kann man aber den Quotienten leicht zu gross annehmen, so dass dessen Quadrat nicht subtrahirt werden kann. Dieser Irrthum entdeckt sich aber eher, als wenn man den Quotienten zu klein angenommen hat.

Multiplicirt man die gefundene Quadrat-Wurzel mit sich selbst, so muss, als Probe einer fehlerfreien Rechnung, die Zahl, aus welcher sie gezogen worden, wieder kommen.

Amerkung. Die vorhergehenden Regeln lassen sich auch ohne Hülfe der Formel $a^2+2ab+b^2$ leicht behalten und ausüben. Die Operation selbst kann aber noch verkürzt werden, so dass man beinahe nur halb so viele Zahlen zu schreiben braucht, wenn man, statt der ersten Ziffer einer folgenden Classe, gleich alle beide Ziffern zu dem jedesmaligen Reste setzt, dann bis in die, durch ein Komma bezeichnete erste Ziffer dividirt, den Quotienten gleich mit sich selbst und mit dem Divisor multiplicirt und beide Producte auf einmal subtrahirt &c., wie folgende Beispiele zeigen.

$$\sqrt{57|76} = \overset{a\,b}{76};$$
$$a^2 = 49$$
$$2a,b = 14,6 \quad 87,6$$
$$2ab+b^2 = 87\,6$$

kürzer:

$$\sqrt{58|36|96} = 764$$
$$\begin{array}{rl} & 49 \\ 14,6) & 93,6 \\ & 87\,6 \\ 152,4) & 609,6 \\ & 609\,6 \end{array}$$

$$\sqrt{58|41|54|49} = 7643;$$
$$\begin{array}{rl} & 49 \\ 14,6) & 94,1 \\ & 87\,6 \\ 152,4) & 655,4 \\ & 609\,6 \\ 1528,3) & 4584,9 \\ & 4584\,9 \end{array}$$

$$\sqrt{4|03|20|64} = 2008$$
$$\begin{array}{rl} & 4 \\ 400,8) & 32,06,4 \\ & 32\,06\,4 \end{array}$$

$$\sqrt{100} = 10$$
$$\sqrt{400} = 20$$
$$\sqrt{10000} = 100$$

192.

Um die Regel zu finden, nach welcher man eine irrationale Wurzel, z. B. $\sqrt{6}$, bis zu beliebig vielen Decimalen genau bestimmen kann, beachte man erst Folgendes. Es ist $6 = \frac{600}{100} = \frac{60000}{10000}$ &c., also (§ 181):

$$\sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{600}{100}} = \frac{\sqrt{600}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{600}}{10} = \frac{24}{10} = 2,4$$

Die Wurzel aus 600 ist nämlich in ganzen Zahlen = 24, daher bis auf Zehntel genau: $\sqrt{6} = 2,4\ldots$

```
√6|00 = 24
  4
4,4  20,0
     17 6
```

Ferner:

$$\sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{60000}{10000}} = \frac{\sqrt{60000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{60000}}{100}$$

Nun ist in ganzen Zahlen: $\sqrt{60000} = 244$, daher bis auf Hundertel genau: $\sqrt{6} = \frac{244}{100} = 2,44\ldots$

Hieraus ergiebt sich nun sogleich, wie man die Wurzel aus einer unvollkommenen Quadratzahl näherungsweise bis auf so viele Decimalstellen als man will, finden kann.

Man ziehe nämlich aus der vorgegebenen Zahl die Wurzel erst in ganzen Einheiten und setze darnach das Decimalzeichen, hänge hierauf dem Reste zwei Nullen an und verfahre wie vorhin, indem man die beiden Nullen als die folgende Classe betrachtet, so findet man die Zehntel; dem jetzt bleibenden Reste abermals zwei Nullen angehängt, findet man auch die Hundertel der Wurzel &c. So findet man z. B. $\sqrt{283} = 16,8226\ldots$

```
√2|83 = 16,8226...
  1
2,6)  18,3
      15 6
32,8)  270,0
       262 4
336,2)  760,0
        672 4
3364,2)  8760,0
         6728 4
33644,6)  203160,0
          201867 6
            129240,0
              &c.
```

```
√2 = 1,41421...
  1
2,4)  100
       96
28,1)  40,0
       28 1
282,4)  11900
        11296
2828,2)  60400
         56564
28284,1)  38360,0
          28284 1
           107590,0
              &c.
```

193.

Ist aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch die Quadratwurzel zu ziehen, so zieht man die Wurzel erst aus der ganzen Zahl und hängt den bleibenden Resten, statt wie vorhin zwei Nullen, immer zwei der folgenden Decimalen an. So findet man z. B. $\sqrt{312,506} = 17,677\ldots$

Eben so findet man die Wurzel aus einem blossen Decimalbruch. z. B. $\sqrt{0,00465} = 0,068\ldots$

```
√3|12,|50|60 = 17,677...
 1
2,7) 212
     189
34,6) 235,0
      207 6
352,7) 2746,0
       2468 9
3534,7) 27710,0
        24742 9
         296710,0
           &c.
```

```
√0,00|46|50 = 0,06819...
     36
12,8) 105,0
      102 4
136,1) 260,0
       136 1
1362,9) 12390,0
        12266 1
          &c.
```

Es ist nämlich:

$$\sqrt{0{,}00465} = \sqrt{\tfrac{4650}{1000000}} = \frac{\sqrt{4650}}{1000} = \tfrac{68}{1000} = 0{,}068$$

194.

Um aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, ist es am bequemsten, entweder den Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, oder erst Zähler und Nenner mit dem Nenner zu multipliciren, damit die Wurzel aus dem Nenner rational wird und man nur eine Wurzel, aus dem Zähler nämlich, zu ziehen braucht. So ist z. B.:

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{0{,}428571} = 0{,}654\ldots$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{\tfrac{3\,.\,7}{7\,.\,7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4{,}582\ldots}{7} = 0{,}654\ldots$$

Eben so ist:

$$\sqrt{2\tfrac{3}{8}} = \sqrt{2{,}3750} = 1{,}541$$

$$\sqrt{2\tfrac{3}{8}} = \sqrt{\tfrac{19}{8}} = \sqrt{\tfrac{38}{16}} = \frac{\sqrt{38}}{4} = \frac{6{,}164\ldots}{4} = 1{,}541\ldots$$

Zur Uebung im numerischen Rechnen ziehe man folgende Wurzeln aus:

$\sqrt{76807696} = 8764$

$\sqrt{1129969} = 1063$

$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

$\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$

$\sqrt{8} = 2{,}82842\ldots$

$\sqrt{10} = 3{,}16227\ldots$

$\sqrt{25{,}0400057} = 5{,}00399\ldots$

$\sqrt{25\tfrac{5}{7}} = 5{,}07092\ldots$

$\sqrt{\tfrac{3}{5}} = 0{,}77459\ldots$

$\sqrt{13\tfrac{4}{5}} = 3{,}71483\ldots$

$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0{,}86602\ldots$

$\sqrt{\tfrac{7}{25}} = 0{,}52915\ldots$

$\sqrt{0{,}0004} = 0{,}02$

195.

Ausziehung der Cubicwurzel. Mit der Ausziehung der Wurzeln von höheren Graden nach der älteren, eben gezeigten Methode, nehmen die practischen Schwierigkeiten in ungemein grösserem Maasse zu. Schon die Ausziehung der Cubicwurzel ist so unerträglich mühsam und zeitraubend, dass Jeder, der nicht das grosse Einmaleins weiss und eine ausserordentliche Sicherheit und Fertigkeit im Rechnen hat, sich gewiss mit der blossen Theorie begnügen, und dafür mit den beiden folgenden Capiteln vertraut machen wird. Uebrigens hat die Theorie über die Ausziehung der Cubicwurzeln, so wie auch die aller höheren Grade, nicht die geringste Schwierigkeit, indem sie der vorhergehenden über die Ausziehung der Quadratwurzel durchaus ähnlich ist. Man merke sich also zunächst folgende Sätze:

196.

Der Cubus einer jeden Zahl muss entweder 3mal so viel Ziffern haben als die Wurzel, oder 3mal so viel, weniger eine, oder 3mal so viel, weniger 2 Ziffern. Der Cubus von einer vierziffrigen Zahl, 4356 z. B., hat entweder 12, 11 oder 10 Ziffern, denn er muss zwischen die Cuben der beiden nächsten einfachen, Rangzahlen 1000 und 10000 fallen, wovon die eine eben so viel, die andere aber eine Ziffer mehr hat, als die gegebene Wurzel. Nun hat aber (§ 187) der Cubus von 1000 gerade 10 und der Cubus von 10000 gerade 13 Ziffern.

Der Cubus einer jeden einziffrigen, und umgekehrt, die Cubicwurzel aus jeder vollkommenen ein-, zwei-, und dreiziffrigen Cubiczahl ist mit Hülfe der folgenden Tabelle, oder auch leicht im Kopfe zu berechnen, und mithin als bekannt vorauszusetzen.

Wurzeln..	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuben....	1	8	27	64	125	216	343	512	729

197.

Wenn man also eine vollkommene Cubiczahl rückwärts in Classen von je drei Ziffern theilt (die höchste kann auch nur eine oder zwei enthalten), so muss die Cubicwurzel daraus gerade so viel Ziffern haben, als Classen vorhanden sind, und die erste Ziffer muss die möglichst grösste (einziffrige) Cubicwurzel aus der ersten Classe sein. Die Cubicwurzel aus 635478923 z. B. muss 3 Ziffern haben, und 8 muss die erste sein; denn die Zahl giebt eingetheilt 3 Classen und der Cubus von 8, nämlich $8^3 = 512$ ist der möglichst grösste, welcher sich von der ersten Classe subtrahiren lässt.

512 000|000 = 800^3
635|478|923 = $(8xy)^3$ (§ 187)
729|000|000 = 900^3

Die Cubicwurzel aus 635478923 muss also zwischen 800 und 900 liegen. Um nun auch die allgemeinen Regeln zu finden, nach welchen man die folgenden Ziffern x, y bestimmt, müssen wir erst das Gesetz entwickeln, nach welchem bei der Bildung eines Cubus die Ziffern der Wurzeln dazu beitragen.

198.

Erhebt man eine zweitheilige Grösse, $a+b$, zum Cubus, indem man das Quadrat nochmals mit der Wurzel multiplicirt; so kommt, wie nachstehende Multiplication zeigt:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Diese Formel, welche man im Gedächtniss behalten muss, um darnach den Cubus einer jeden andern zweitheiligen Grösse, ohne ihn durch wirkliche Multiplication entwickeln zu brauchen, gleich niederschreiben zu können, lautet in Worten: der Cubus einer jeden zweitheiligen Grösse enthält folgende vier Theile: den Cubus des ersten Theils, das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Theils mit dem zweiten multiplicirt, das dreifache Product aus dem ersten Theil mit dem Quadrate des zweiten multiplicirt und den Cubus des zweiten Theils. Erheben wir nach dieser Formel beliebig vielziffrige Zahlen zum Cubus, indem wir, um den Einfluss der Ziffern auf einander leichter zu erkennen, die Zahlen erst in zwei solche Theile zerlegen, dass die Einer den zweiten Theil bilden, und also die vorhergehenden Ziffern, um ihren Rang zu behalten, auf eine Null endigen, und schreiben dann die vier Theile der entwickelten Cuben wie folgt unter einander:

No. 1.

$74^3 = (\overset{a}{70} + \overset{b}{4})^3 =$

$70^3 =$	343	000 = a^3
$3 \cdot 70^2 \cdot 4 =$	58	800 = $3a^2b$
$3 \cdot 70 \cdot 4^2 =$	3	360 = $3ab^2$
$4^3 =$		64 = b^3
$74^3 =$	405	224

No. 2.

$748^3 = (\overset{a}{740} + \overset{b}{8})^3 =$

$740^3 =$	405	224	000 = a^3
$3 \cdot 740^2 \cdot 8 =$	13	142	400 = $3a^2b$
$3 \cdot 740 \cdot 8^2 =$		142	080 = $3ab^2$
$8^3 =$			512 = b^3
$748^3 =$	418	508	992

so wird man bei No. 1 folgendes Gesetz erkennen: der Cubus der 1sten Ziffer liegt ganz in der ersten Classe, das dreifache Product aus dem Quadrate der 1sten Ziffer mit der 2ten multiplicirt, erstreckt sich nur bis in die 1ste Ziffer der 2ten Classe, das dreifache Product der 1sten Ziffer mit dem Quadrate der 2ten multiplicirt, erstreckt sich bis in die 2te Ziffer der 2ten Classe, und der Cubus der 2ten Ziffer liegt ganz in der 2ten Classe.

Ferner ist hiernach und nach § 187 leicht allgemein zu schliessen: dass, wenn eine Cubiczahl mehr als zwei Classen hat, die 1ste Classe (zwei, drei, vier 1sten Classen &c.) keinen grössern Cubus enthalten kann, als den von der 1sten (zwei, drei, vier 1sten &c.) Ziffer der Wurzel, und dass das dreifache Product aus dem Quadrate der 1sten (zwei, drei, vier.. 1sten) Ziffer mit der folgenden multiplicirt, sich bis in die 1ste Ziffer der 2ten (3ten, 4ten, 5ten) Classe erstrecken muss &c. Umgekehrt kann man also durch unmittelbare Wiederholung einer und derselben, durch die Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gegebenen Regel, die Cubicwurzel aus jeder Zahl von noch so vielen Classen finden.

199.

Regeln für die Ausziehung der Cubicwurzel. 1) Man theile die vorgegebene Zahl, aus welcher eine Cubicwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke, in Classen von je drei Ziffern (die erste kann aber auch zwei oder nur eine enthalten).

2) Setze als erste Ziffer der Cubicwurzel diejenige (einzifferige) Cubicwurzel, welche aus der ersten Classe in ganzen Einheiten möglich ist, und subtrahire diesen Cubus.

3) Setze zu dem etwaigen Reste die 1ste Ziffer der 2ten Classe, dividire hierin mit dem dreifachen Quadrate der ersten Ziffer der Wurzel, setze den Quotienten als 2te Ziffer derselben und subtrahire das mit ihr multiplicirte dreifache Quadrat der 1sten Ziffer. (Den erwähnten Quotienten, als die gesuchte folgende Ziffer der Wurzel, kann man leicht zu gross annehmen, ein Irrthum, der sich aber weit eher entdeckt, als wenn man den Quotienten zu klein annimmt.)

4) Zu dem Reste füge jetzt die 2te Ziffer der 2ten Classe und subtrahire hiervon das dreifache Product der ersten Ziffer mit dem Quadrate der bekannt gewordenen 2ten Ziffer multiplicirt.

5) Zu dem jetzt gebliebenen Reste füge die dritte Ziffer der 2ten Classe und subtrahire hiervon den Cubus der bekannt gewordenen 2ten Ziffer.

Sind mehr als zwei Classen vorhanden, so muss man die vorhergehenden Regeln 3, 4 und 5 wiederholen, nämlich: zu dem gebliebenen Reste die 1ste Ziffer der 3ten Classe setzen, hierin mit dem dreifachen Quadrate der beiden ersten Ziffern der Wurzel (welche man als den gefundenen ersten Theil (a) derselben ansieht) dividiren, den Quotienten als die dritte Ziffer der Wurzel setzen, und damit wie vorhin bei 3, 4, 5 verfahren.

Man sieht leicht, dass die Arbeit mit jeder neuen Ziffer de Wurzel immer beschwerlicher wird, indem man jedesmal alle vorhergehenden quadriren, so wie überhaupt immer grösser werdende Producte entwickeln muss. Beispiele:

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt[3]{405|224} = \overset{a\,b}{74} & \\
a^3 = 7^3 = & 343\ :\ :\ : & \\
\hline
3a^2 = 3\cdot7^2 = 147) & 622\ :\ : & \\
3a^2b = 3\cdot7^2\cdot4 = & 588\ :\ : & \\
\hline
 & 342\ : & \\
3ab^2 = 3\cdot7\cdot4^2 = & 336\ : & \\
\hline
 & 64 & \\
b^3 = 4^3 = & 64 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt[3]{418|508|992} = \overset{a\,b}{748} & \\
a^3 = & 343\ :\ :\ :\ :\ :\ : & \\
\hline
3a^2 = 147) & 755\ :\ :\ :\ :\ : & \\
3a^2b = & 588\ :\ :\ :\ :\ : & \\
\hline
 & 1670\ :\ :\ :\ : & \\
3ab^2 = & 336\ :\ :\ :\ : & \\
\hline
 & 13348\ :\ :\ : & \\
b^3 = & 64\ :\ :\ : & \\
\hline
3a^2 = 3\cdot74^2 = 16428) & 132849\ :\ : & \\
3a^2b = & 131424\ :\ : & \\
\hline
 & 14259\ : & \\
3ab^2 = & 14208\ : & \\
\hline
 & 512 & \\
b^3 = & 512 & \\
\hline
\end{array}$$

Als Probe der richtigen Rechnung muss die Wurzel, dreim mit sich selbst multiplicirt, die Cubiczahl wiedergeben.

200.

Nach den vorhergehenden Regeln kann man nun auch die i rationalen Wurzeln bis auf beliebig viele Decimalen finden. H man nämlich erst die ganzen Einheiten der Wurzel gefunden, hänge man der vorgegebenen Zahl beliebig viele Classen von je d

Nullen an, und verfahre wie vorhin, so findet man auch die Zehntel, Hundertel &c. (§ 192.)

Soll aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch die Cubicwurzel gezogen werden, so ziehe man sie erst aus der ganzen Zahl und hänge den Resten, statt wie vorhin jedesmal drei Nullen, drei der folgenden Decimalen an.

Eben so verfährt man mit einem blossen Decimalbruch.

Ist aus einem gewöhnlichen Bruche die Cubicwurzel zu ziehen, so ist es am bequemsten, ihn erst in einen Decimalbruch zu verwandeln, oder auch die Wurzel aus dem Nenner rational zu machen, indem man Zähler und Nenner zuvor mit dem Quadrate des Nenners multiplicirt. So findet man z. E.:

$\sqrt[3]{9|007} = 20,806\,..$
8
$3a^2 = 12)\ 10$
$3a^2 = 1200)\ 10070$
$3a^2b = 9600$
4700
$3ab^2 = 3840$
8600
$b^3 = 512$
$3a^2 = 129792)\ 80880$
$3a^2 = 12979200)\ 80880000$
&c.

$\sqrt[3]{2} = 1,25\,..$
1
$3a^2 = 3)\ 10$
$3a^2b = 6$
40
$3ab^2 = 12$
280
$b^3 = 8$
$3a^2 = 432)\ 2720$
$3a^2b = 2160$
5600
$3ab^2 = 900$
47000
$b^3 = 125$
&c.

$\sqrt[3]{2,057|600} = 1,2\,...$
1
$3a^2 = 3)\ 10$
$3a^2b = 6$
45
$3ab^2 = 12$
337
&c.

$\sqrt[3]{0,007|040} = 0,19\,..$
1
$3a^2 = 3)\ 60$
$3a^2b = 27$
334
$3ab^2 = 243$
910
$b^3 = 729$
1810
&c.

Zufolge § 194 ist $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}=\sqrt[3]{0,8}$, oder:

$$\sqrt[3]{\frac{4}{5}}=\sqrt[3]{\frac{4.5.5}{5.5.5}}=\frac{\sqrt[3]{100}}{5}$$

Beispiele:

$\sqrt[3]{731432701}=901$

$\sqrt[3]{1367631}=111$

$\sqrt[3]{351}=7,054004\,..$

$\sqrt[3]{100}=4,641588\,..$

$\sqrt[3]{3}=1,44224\,..$

$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=0,90855\,..$

$\sqrt[3]{6\frac{2}{3}}=1,88207\,..$

$\sqrt[3]{0,032768}=0,32\,..$

Sechszehntes Buch.

Von den Potenzen und Wurzeln im Allgemeinen. Rechnung mit denselben.

201.

Wenn aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden soll, so pflegt man dies, der Kürze wegen, auch so anzudeuten: dass man den Wurzelexponenten, als Nenner, unter den als Zähler betrachteten Potenzexponenten setzt. Um z. E. anzudeuten, dass aus a^m die $n$te Wurzel gezogen werden soll, schreibt man statt: $\sqrt[n]{a^m}$ oftmals so: $a^{\frac{m}{n}}$, statt $\sqrt[3]{8^2}$ kürzer: $8^{\frac{2}{3}}$ (lies: 8 zweidrittel Potenz). Hiernach $\sqrt{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$. Jede Grösse, die keinen Exponenten hat, kann man als die erste Potenz derselben betrachten und mit dem Exponenten 1 schreiben: $a=a^1$; daher auch: $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^1}=a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. Hiernach ist also auch umgekehrt $x^{\frac{m}{n}}$ so viel als $\sqrt[n]{x^m}$; $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$; $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$ &c. Der Gebrauch der (von Cartesius eingeführten) Bruch-Exponenten macht das Wurzelzeichen entbehrlich, wodurch die Uebersicht und das Rechnen mit Potenzen ungemein erleichtert wird.

202.

Einer Potenz mit gebrochenem Exponenten kann man auch (wohl zu merken) folgende Bedeutung unterlegen: Es soll die Grösse, an welcher der gebrochene Exponent steht, erst in so viel gleiche Factoren zerlegt werden, als sein Nenner Einheiten hat, und dann einer dieser gleichen Factoren so oft gesetzt werden, als sein Zähler Einheiten hat. Es ist nämlich einerlei, ob man, um eine Grösse mit gebrochenem Exponenten zu berechnen, erst die Wurzel zieht, deren Grad der Nenner angiebt, und diese Wurzel auf die Potenz erhebt, deren Grad der Zähler angiebt, oder ob man die Grösse erst auf diese Potenz erhebt, und daraus jene Wurzel zieht.

Es ist z. B.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Aber auch: $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Allgemein: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$

Die Richtigkeit dieses für die Potenz-Rechnung wichtigen Satzes lässt sich durch Hülfe des Folgenden beweisen:

Erhebt man eine Potenz, z. B. a^3, wieder zu einer Potenz, z. B. zur vierten, in Zeichen: $(a^3)^4$, so erhält man eine Potenz von so hohem Grade, als das Product aus beiden Exponenten angiebt, denn werden drei gleiche Factoren aaa oder a^3 wiederum viermal als Factor gesetzt, so erhält man offenbar ein Product von zwölf gleichen Factoren: $aaa \cdot aaa \cdot aaa \cdot aaa = (a^3)^4 = a^{12}$. Hiernach ist nun auch leicht einzusehen, dass auch $(a^3)^4 = (a^4)^3$, allgemein $(a^n)^m = (a^m)^n$.

Um nun einzusehen, dass allgemein:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$$

denke man sich die Grösse a in n gleiche Factoren zerlegt, oder $a = w^n$ gesetzt. Substituirt man nun w^n statt a in $(\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{(a^m)}$, so wird:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{w^n})^m = w^m$$

und eben so: $\sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[n]{(w^n)^m} = \sqrt[n]{(w^m)^n} = w^m$

folglich ist allgemein: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$

203.

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchexponenten, oder was dasselbe ist, den Potenz- und Wurzelexponenten mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt deshalb der Werth der Potenz ungeändert. Es ist z. B.:

$$64^{\frac{2}{3}} = 64^{\frac{4}{6}}$$

$$\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[6]{64^4}$$

Allgemein: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

* Denn wenn die Grösse a in $p$mal so viel gleiche Factoren zerlegt, und einer derselben dafür wieder $p$mal so oft gesetzt wird, so muss offenbar dasselbe Resultat kommen. Es ist z. B.:

$$(\sqrt[3]{64})^2 = (\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4})^2 = 4^2 = (2 \cdot 2)^2 = 2^4$$

$$(\sqrt[6]{64})^4 = (\sqrt[6]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2})^4 = 2^4$$

Allgemein, indem wie in § 202 die Grösse a in np Factoren zerlegt und w^{np} statt a gesetzt denkt:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{w^{pn}})^m = (w^p)^m = w^{mp}$$

$$(\sqrt[np]{a})^{mp} = (\sqrt[np]{w^{np}})^{mp} = w^{mp}$$

Vermöge dieses Satzes können mehrere Bruchexponenten auf einerlei Nenner gebracht und dadurch, wie man im folgenden § sehen wird, manche Grössen-Ausdrücke sehr vereinfacht werden. *)

204.

Um Potenzen von *einerlei* Wurzel mit einander zu multipliciren, braucht man nur ihre Exponenten zu addiren; das Product ist nämlich wieder eine Potenz von derselben Wurzel, deren Exponent jene Summe sein muss, weil es allein so viele gleiche Factoren enthält, als die mit einander multiplicirten Potenzen zusammen; z. B.:

$$a^5 \cdot a^2 = a^{5+2} = a^7; \qquad \text{denn } a^5 \cdot a^2 = aaaaa \cdot aa = a^7$$

$$3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^5 = 3^{11}; \quad x^5 x^3 x = x^{5+3+1} = x^9; \quad b^{15} b^{15} = b^{30}$$

---

*) Auch kann man vermittelst dieses Satzes mehrere auszuziehende Wurzeln, ohne ihre wirklichen Grössen kennen zu brauchen, mit einander vergleichen und z. E. leicht entscheiden, welche von den drei Grössen $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{24}$ die grösste oder kleinste ist. Setzt man nämlich statt der Wurzelzeichen Bruchexponenten, und bringt diese auf einerlei Nenner, so hat man:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\ \sqrt[6]{24} = 24^{\frac{1}{6}} = 24^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{24} \end{cases}$$

Mithin ist von den drei fraglichen Grössen $\sqrt{3}$ die grösste und $\sqrt[6]{24}$ die kleinste.

Eben so, wenn die Exponenten Brüche sind; z. B.:

$$a^{\frac{3}{7}} \cdot a^{\frac{2}{7}} = a^{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}} = a^{\frac{5}{7}};$$

denn die eine Grösse enthält die 7te Wurzel aus a dreimal, die andere dieselbe Wurzel zweimal, also zusammen 5mal als Factor:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}} = a^{\frac{17}{12}}$$

Beispiele:

$$a^m a^n = a^{m+n}; \qquad x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{p}{n}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}} = x^{\frac{m+p}{n}}$$

$$a^m a^n a^p = a^{m+n+p}; \qquad x^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{2n}{2}} = x^n$$

$$x^m x = x^{m+1}; \qquad x^{\frac{m}{n}} x = x^{\frac{m}{n}+1} = x^{\frac{m+n}{n}}$$

$$2a^5b^3 \cdot 3a^2b = 2 \cdot 3 \cdot a^5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b = 6a^7b^4 \quad (\text{§ } 141.)$$

$$a^4(a^3 - a^2 + 1) = a^7 - a^6 + a^4 \quad (\text{§ } 141, 2.)$$

$$3x^5(2x^4 + 4x + 3) = 6x^9 + 12x^6 + 9x^5$$

$$a^3b^4(a^3b + ab^3 + b^4) = a^6b^5 + a^4b^7 + a^3b^8$$

$$(a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) = a^4 - 1 \quad (\text{§ } 141, 3.)$$

$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4 \quad (\text{§ } 143.)$$

205.

Um Potenzen von einerlei Wurzel durch einander zu dividiren, braucht man nur (weil eine gleiche Anzahl gemeinschaftlicher Factoren im Divisor und Dividendus sich gegenseitig tilgen) **den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus zu subtrahiren.** So ist z. B:

$$\frac{8^7}{8^4} = 8^{7-4} = 8^3; \text{ denn } \frac{8^7}{8^4} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$$

$$\frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}} = a^{\frac{5}{7}-\frac{3}{7}} = a^{\frac{2}{7}}. \quad \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{12}} \quad (\text{§ } 203.)$$

$$\text{denn: } \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}} = \frac{(\sqrt[7]{a})^5}{(\sqrt[7]{a})^3} = (\sqrt[7]{a})^{5-3} = (\sqrt[7]{a})^2 = a^{\frac{2}{7}}$$

Selbst wenn der Exponent des Divisors grösser ist, als der des Dividendus, pflegt man dennoch die Subtraction zu vollziehen, und den Quotienten mit negativem Exponenten stehen zu lassen; z. B.:

$$\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}; \qquad \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{1}{12}}$$

Ist also ein negativer Exponent durch die Division zweier Potenzen von gleicher Wurzel entstanden, so will dies weiter nichts sagen, als dass der Divisor mehr Factoren hatte, als der Dividendus, und zwar so viel mehr, als der negative Exponent Einheiten hat. Eine Grösse mit negativem Exponenten ist daher selbst nicht negativ, sondern immer gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Grösse mit positivem Exponenten, nämlich:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \qquad x^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}}; \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}; \qquad 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Da die negativen Exponenten eben so wie die gebrochenen den allgemeinen Regeln der Potenzrechnung unterworfen sind, so pflegt man manchmal, ohne durch die Division dazu veranlasst zu sein, der blossen Gleichförmigkeit wegen, eine als Nenner stehende Potenz mit umgekehrtem Vorzeichen ihres Exponenten, in den Zähler zu setzen. So kann man z. B. statt: $\frac{a^3 x^4}{y^5}$, auch kürzer so schreiben: $a^3 x^4 y^{-5}$.

Sind Dividendus und Divisor gleich gross, so ist der Quotient immer $= 1$, z. B.:

$$\frac{a^7}{a^7} = 1; \qquad \frac{x^n}{x^n} = 1;$$

die allgemeine Regel giebt aber in diesem Fall 0 zum Exponenten; z. B.:

$$\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0; \qquad \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0.$$

Eine Grösse mit 0 als Exponent muss also immer der Einheit gleich gesetzt, und nicht mit 0 verwechselt werden; z. B.:

$$a^0 = 1; \qquad x^0 = 1; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1; \qquad 1^0 = 1.$$

206.

Dass übrigens die im vorigen und vorvorigen § gegebenen Regeln ganz allgemein, mithin auch auf negative (inverse) Exponenten

anwendbar sind, und man sich nur strenge an die gegebene Theorie zu halten braucht, ist einzusehen. So ist z. B.:

Multipl. $\begin{cases} a^7 \cdot a^{-4} = a^{7-4} = a^3; & \text{weil: } a^7 \cdot a^{-4} = a^7 \cdot \frac{1}{a^4} = a^3; \\ a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-3-2} = a^{-5}; & \text{weil: } a^{-3} \cdot a^{-2} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}; \end{cases}$

Divis. $\begin{cases} \frac{a^7}{a^{-4}} = a^{7-(-4)} = a^{11}; & \text{weil: } \frac{a^7}{a^{-4}} = a^7 : \frac{1}{a^4} = a^7 \cdot \frac{a^4}{1} = a^{11}; \\ \frac{a^{-4}}{a^{-7}} = a^{-4-(-7)} = a^3; & \text{weil: } \frac{a^{-4}}{a^{-7}} = \frac{1}{a^4} : \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^4} \cdot \frac{a^7}{1} = a^3; \end{cases}$

Allgemein:

$a^m a^{-n} = a^{m-n};$ $\frac{a^m}{a^{2m}} = a^{-m};$

$a^m a^{-1} = a^{m-1};$ $\frac{a}{a^n} = a^{1-n};$

$\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{-n+m} = a^{m-n};$ $\frac{a^n}{a} = a^{n-1};$

$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a} = a^{\frac{m}{n}-1} = a^{\frac{m-n}{n}};$ $\frac{a}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{1-\frac{m}{n}} = a^{\frac{n-m}{n}};$

$a^{m-n} \cdot a^n = a^m;$ $\frac{a^m}{a^{m-n}} = a^{m-m+n} = a^n;$

$a^{m-1} \cdot a^{1-m} = a^0 = 1;$ $2x^6(3x - 4x^3) = 6x^7 - 8x^9;$

$\frac{6a^5}{9a^9} = \frac{2}{3a^4} = \frac{2}{3}a^{-4};$ $\frac{4a^5 b^7 c^3}{2ab^4 c^3} = 2a^4 b^3;$

$(2a^3b^5 - 3ab^{-4})(5a^{-2}b^3 + ab^4) = 10ab^8 + 2a^4b^9 - 15a^{-1}b^{-1} - 3a^2.$

Anmerkung. Wir haben uns über den Sinn der gebrochenen und negativen Exponenten vollkommen verständigt und darüber weiter keine Erklärung nöthig. Will man aber ein wenig Gewalt gebrauchen, so kann man alle Zustände des Exponenten, wo er nämlich eine ganze, gebrochene oder negative Zahl ist, in einen einzigen allgemeinen Potenz-Begriff zusammenziehen. Er lautet dann: P o t e n t i i r e n   h e i s s t : M a n   s o l l   m i t   e i n e r   G r ö s s e   (G r u n d f a c t o r)   g r a d e   s o   i m   S i n n e   d e r   M u l t i p l i c a t i o n   v e r f a h r e n ,   w i e   m a n   m i t   d e r   E i n h e i t   i m   S i n n e   d e r   A d d i t i o n   v e r f u h r ,   i n d e m   m a n   d a r a u s   d e n   E x p o n e n t e n   b i l d e t e.* In dem Ausdrucke 8^3 z. B. wurde der Exponent 3 gebildet, indem

---

* S. *Thibaut's* Arithmetik.

man die Einheit dreimal direct als P o s t setzte $3 = 1 + 1 + 1$, mithin muss auch der Erklärung zufolge die Grösse 8 dreimal direct als Factor gesetzt werden, daher $8^3 = 8.8.8$. In $8^{\frac{2}{3}}$ wurde die Einheit erst in drei gleiche Pöste zerlegt $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ und einer davon zweimal direct gesetzt $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, daher muss auch 8 erst in drei gleiche Factoren zerlegt und einer davon zweimal direct gesetzt werden, nämlich: $8 = 8^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{3}}$, mithin: $8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{8})^2$. In 8^{-3} wurde zur Bildung des Exponenten die Einheit dreimal invers gesetzt (nämlich im Sinne der Subtraction $-3 = -1-1-1$) folglich muss auch 8 dreimal invers als Factor, nämlich im Sinne der Division, gesetzt werden, daher: $8^{-3} = \frac{1}{8} . \frac{1}{8} . \frac{1}{8} = \frac{1}{8^3}$. In 8^0 entstand der Exponent, indem die Einheit eben so oft invers als direct gesetzt wurde; dasselbe muss nun mit der Grösse 8 geschehen. So ist z. B.:

$$8^0 = 8^{1-1} = 8^{2-2} \ldots = 8 . \frac{1}{8} = 8^2 . \frac{1}{8^2} \ldots = 1.$$

207.

U m e i n e P o t e n z n o c h m a l s a u f e i n e P o t e n z z u e r h e b e n , b r a u c h t m a n n u r d e n a l t e n E x p o n e n t e n m i t d e m n e u e n z u m u l t i p l i c i r e n . Soll z. B. a^4 auf die dritte Potenz erhoben werden, so deutet man dies durch $(a^4)^3$ an, und man hat dann:

$$(a^4)^3 = a^{12}; \qquad \text{denn } (a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4};$$

$$(a^{-3})^2 = a^{-6}; \qquad \text{denn } (a^{-3})^2 = a^{-3} . a^{-3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6};$$

$$(a^{\frac{3}{8}})^2 = a^{\frac{6}{8}} = a^{\frac{3}{4}}; \quad \text{denn } (a^{\frac{3}{8}})^2 = [(\sqrt[8]{a})^3]^2 = (\sqrt[8]{a})^6 = a^{\frac{6}{8}}.$$

Allgemein:

$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^n = \frac{a^{mn}}{b^{nn}};$$

$$[(a^m)^n]^p = a^{mnp}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m; \qquad (a^{\frac{2}{3}})^3 = a^2; \; *$$

$$* \quad (a^3)^3 = a^9; \qquad a^{3^3} = a^{27};$$

$$(10^{10})^{10} = 10^{100}; \qquad 10^{10^{10}} = 10^{10000000000};$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2; \qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = 2; \qquad \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3} = 3.$$

208.

Soll umgekehrt aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden, so braucht man nur den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten zu dividiren, und die Division, wenn sie nicht vollzogen werden kann, bloss anzudeuten. Beispiele:

$\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3$; $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$;

$\sqrt[3]{4^{\frac{3}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^{\frac{6}{7}}} = a^{\frac{2}{7}}$;

$\sqrt{5^{\frac{3}{8}}} = 5^{\frac{3}{16}}$; $\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$;

Allgemein:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[n]{a^{m+1}} = a^{\frac{m+1}{n}}$

$\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$; $\sqrt[n]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{n}}$

$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$; $\sqrt{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{2}} = a^n$;

$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$; $\sqrt{a^{-4}} = a^{-2}$.

209.

Um eine aus Factoren bestehende Grösse auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur jeden Factor besonders zu potentiiren. So ist z. B.:

$(2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3$; denn $(2\cdot3)^3 = 2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^3$;

Allgemein: $(abc)^n = a^n b^n c^n$.

Beispiele:

$(a^3b^5)^3 = a^9b^{15}$; $(\frac{2}{3}\sqrt{a})^2 = \frac{4}{9}a$;

$(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2$; $(\frac{1}{5}\sqrt[3]{x})^3 = \frac{x}{125}$;

$(\frac{1}{3}\sqrt{a})^2 = \frac{1}{9}a$; $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = ab$.

210.

Umgekehrt wird aus einer, aus Factoren bestehenden oder zuvor in Factoren zerlegten Grösse eine Wurzel gezogen, wenn man sie aus jedem Factor besonders zieht. Wenn das $\sqrt{\ }$ Zeichen vor einer aus Factoren bestehenden, mithin eintheiligen Grösse steht, so ist die Klammer überflüssig. Statt $\sqrt{(abc)}$ schreibt man kurz: $\sqrt{abc}$; z. B.:

$$\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{c^9} = ab^2c^3;$$

Allgemein: $$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Eine Grösse, welche auf die $n$te Potenz erhoben, die Grösse ab giebt, ist die $n$te Wurzel aus ab. Da nun (§ 209) $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$, so ist auch umgekehrt: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Beispiele:

$$\sqrt{\frac{a^2 b^4}{c^6 x^2}} = \frac{ab^2}{c^3 x}; \qquad \sqrt[3]{\frac{27a^3}{8b^6}} = \frac{3a}{2b^2}.$$

211.

1) Lässt sich eine Grösse unter dem Wurzelzeichen in zwei solche Factoren zerlegen, dass aus dem einen die Wurzel rational ist, so kann man aus diesem Factor die Wurzel wirklich ziehen und vor dem andern das Wurzelzeichen stehen lassen und davor die ausgezogene Wurzel als Coefficient setzen, z. B.:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$

Hierdurch können Wurzelgrössen oftmals bedeutend vereinfacht und zusammengezogen werden.

Wurzelgrössen heissen nämlich alle solche mit dem Wurzelzeichen behafteten Ausdrücke, aus welchen sich die verlangte Wurzel nicht wirklich ziehen, sondern nur andeuten lässt, wozu also eigentlich auch die Potenzen mit gebrochenen Exponenten und die irrationalen Grössen zu rechnen sind, Wurzelgrössen sind z. B.:

$$\sqrt[3]{a}; \ \sqrt{a}; \ a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}; \ \sqrt{45}; \ \sqrt{27} \ \&c. \qquad (§ 184.)$$

Gleichnamig heissen Wurzelgrössen, wenn die Grössen unter dem Wurzelzeichen und die Wurzelexponenten dieselben sind, die Coefficienten vor dem Wurzelzeichen mögen so verschieden sein als sie wollen; z. B.: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind gleichnamig; eben so

$3\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$; oder $\sqrt{ab}$, $2\sqrt{ab}$; aber $2\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{ab}$ sind ungleichnamig. Beispiele:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2};$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2};$$

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b};\qquad \sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b};$$

$$\sqrt{a^4b^3c^2}=\sqrt{a^4b^4c^2b}=a^2b^2c\sqrt{b};$$

$$\sqrt[3]{24a^7b}=\sqrt[3]{8\cdot 3\cdot a^6ab}=2a^2\sqrt[3]{3ab};$$

$$2\sqrt{18x^2y^5}=2\sqrt{9\cdot 2x^2\cdot y^4\cdot y}=6xy^2\sqrt{2y};$$

$$\sqrt[n]{a^{m+n}b^{2n}}=\sqrt[n]{a^ma^nb^{2n}}=ab^2\sqrt[n]{a^m}.$$

2) Umgekehrt können Factoren ausser dem Wurzelzeichen unter dasselbe gebracht werden, wenn man sie zuvor auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt; z. B.:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18};\qquad a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b};$$

$$2\sqrt{2}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{8};\qquad a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b};$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot 2}=\sqrt{\tfrac{1}{2}};\qquad x\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x^{n+1}}.$$

212.

Rechnung mit Wurzelgrössen. Man merke sich, dass die Einfachheit einer Reduction nicht von dem Grade der Exponenten, sondern von der kleinsten Anzahl Glieder und Wurzelzeichen abhängt. Denn, werden Potenzen und Wurzelgrössen wirklich in Zahlen berechnet, so geschieht dies doch immer vermittelst der Logarithmen, und da verursacht die Ausziehung einer Wurzel vom hundersten Grade nicht mehr Arbeit, als die vom zweiten Grade.

1) *Addition* und *Subtraction.* Sind die Wurzelgrössen ungleichnamig, so kann man diese Operationen nur andeuten; sind sie aber gleichnamig, oder lassen sie sich gleichnamig machen, so braucht man bloss die Coefficienten zu addiren oder subtrahiren.

Beispiele:

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{5}+\sqrt{6};\qquad 2a^{\frac{2}{3}}-5a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{2}{3}}=3a^{\frac{2}{3}};$$

$$2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a}=2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a};\qquad a\sqrt{h}-b\sqrt{h}=(a-b)\sqrt{h};$$

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2};\qquad ax^{\frac{m}{n}}-bx^{\frac{m}{n}}=(a-b)x^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}=\sqrt{50};\quad (\S\ 211,\ 2)$$

$$2\sqrt{27}-3\sqrt{12}=2\sqrt{9\cdot 3}-3\sqrt{4\cdot 3}=6\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0;$$

$$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}.$$

2) *Multiplication.* Man gebe den Wurzelgrössen einerlei Wurzelexponent (§ 203), alsdann braucht man nur ein Wurzelzeichen, unter welches man sämmtliche Grössen als Factoren zusammenstellen kann; die etwaigen Factoren ausser den Wurzelzeichen muss man besonders mit einander multipliciren und ihr Product vor das eine Wurzelzeichen setzen. Beispiele:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab};\qquad \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{6}}\cdot b^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{a^3b^2};$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab};\qquad 2\sqrt{a^3b}\cdot 3\sqrt{ab}=6a^2b;$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=6;\qquad 3\sqrt{a}\cdot 5\sqrt[3]{b}=15\sqrt[6]{a^3b^2};$$

$$2\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{b}=6\sqrt{ab};\qquad \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x^{m+1}};$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a;\qquad 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=15;$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2;\qquad \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a+\sqrt{ab};$$

$$a\sqrt{b}\cdot b\sqrt{a}=ab\sqrt{ab};\quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b;\ (\S\ 143)$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y\ (\S\ 186).$$

3) *Division.* Sind die Wurzelexponenten im Dividend und Divisor gleich oder gleich gemacht, so braucht man nur ein Wurzelzeichen. Beispiele:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}};\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=1;\quad (\S\ 181,\ 2.)$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\tfrac{8}{18}}=\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\tfrac{2}{3};\qquad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=1;$$

$$\frac{2\sqrt{27}}{3\sqrt{12}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{27}{12}}=\tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{4}}=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}=1;$$

$$\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\tfrac{45}{5}}-\sqrt{\tfrac{20}{5}}=3-2=1.$$

213.

Die allgemeine Aufgabe, eine beliebig vieltheilige Grösse auf eine Potenz zu erheben und umgekehrt daraus eine Wurzel zu

ziehen, gehört in die Analysis, wo sie mit Hülfe des Newton'schen oder sogenannten binomischen Lehrsatzes sehr leicht gelöst wird. Für die Elemente ist es hinreichend, die Regeln anzugeben, nach welchen man die zweite und dritte Potenz bildet. Für die Bildung der zweiten Potenz ergiebt sich folgendermaassen ein sehr leicht zu erkennendes Gesetz.

Es möge allgemein $a+b+c+d+\ldots$ eine vieltheilige Grösse bedeuten. Entwickeln wir deren Quadrat zuerst durch wirkliche Multiplication, indem wir die einzelnen Producte, wie angegeben, unter einander ordnen, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d+e+\ldots \\ a+b+c+d+e+\ldots \end{array}\right\}\text{ Factoren}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} a^2 & +ab & +ac & +ad & +ae+\ldots \\ ab & +b^2 & +bc & +bd & +be+\ldots \\ ac & +bc & +c^2 & +cd & +ce+\ldots \\ ad & +bd & +cd & +d^2 & +de+\ldots \\ ae & +be & +ce & +de & +e^2+\ldots \end{array}$$

Aus den je zwei und zwei, als gleich bezeichneten Reihen ergiebt sich nun die anschauliche, leicht zu behaltende Regel, nach welcher man das Quadrat einer vieltheiligen Grösse gleich aus dem Gedächtniss niederschreiben kann, nämlich: d a s Q u a d r a t e i n e r v i e l t h e i l i g e n G r ö s s e b e s t e h t a u s d e n Q u a d r a t e n e i n e s j e d e n T h e i l s, u n d d e n d o p p e l t e n P r o d u c t e n e i n e s j e d e n T h e i l s i n j e d e n n a c h f o l g e n d e n. Haben einige Theile das Minus-Zeichen, so muss man sich erinnern, dass eine gerade Anzahl Minus-Zeichen in den zusammentretenden Factoren, plus, eine ungerade Anzahl aber minus giebt, und die Quadrate alle positiv sind. B e i s p i e l e:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2; \quad (x+\frac{p}{2})^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4};$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2; \quad (x-\frac{p}{2})^2 = x^2-px+\frac{p^2}{4};$$

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2; \quad (x-\tfrac{2}{3}a)^2 = x^2-\tfrac{4}{3}ax+\tfrac{4}{9}a^2;$$

$$(x-1)^2 = x^2-2x+1; \quad (3ax+b)^2 = 9a^2x^2+6abx+b^2;$$

$$(1-x)^2 = 1-2x+x^2; \quad (x^m+a)^2 = x^{2m}+2ax^m+a^2;$$

$$(x+\tfrac{1}{2})^2 = x^2+x+\tfrac{1}{4}; \quad (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x-2\sqrt{xy}+y;$$

$$x^2-(a-x)^2=x^2-(a^2-2ax+x^2)=2ax-a^2;$$

$$b^2-a^2-c^2+2ac=b^2-(a^2+c^2-2ac)=b^2-(a-c)^2;$$

$$b^2-(a-c)^2=(b+a-c)(b-a+c). \quad (\S\ 143.)$$

2) Eben so könnte man auch zur Bildung des Cubus eine allgemeine Regel aufsuchen. Diese ist jedoch viel zu weitläufig. Muss der Cubus einer vieltheiligen Grösse entwickelt werden, so bilde man nach dem Vorhergehenden erst das Quadrat und multiplicire dieses nochmals mit der Wurzel. In den Elementen wird selten und nie mehr als der Cubus einer zweitheiligen Grösse verlangt und hiefür ist die Formel § 198 angegeben, bei welcher nur noch die oben gemachte Bemerkung über die grade und ungrade Anzahl Minus-Zeichen zu beachten ist. Beispiele:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3;$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

$$(a^m-b^n)^3=a^{3m}-3a^{2m}b^n+3a^mb^{2n}-b^{3n}.$$

214.

Die Regeln für die umgekehrte Aufgabe: aus einer vieltheiligen Grösse die Quadrat- und Cubicwurzel zu ziehen, folgen unmittelbar aus den vorhergehenden. Ein Geübterer wird jedoch keine Regeln nöthig haben, sondern die Wurzel, wenn sie möglich ist, gleich auf den ersten Blick erkennen. Selten ist es übrigens möglich, die Wurzeln auszuziehen. Im Allgemeinen kann man es nur andeuten, indem man das Wurzelzeichen vor die in Klammern geschlossene mehrtheilige Grösse setzt, oder sie mit gebrochenen Exponenten schreibt, mit welchen man dann gerade so wie mit eintheiligen Wurzelgrössen oder Potenzen rechnet.

Um z. B. die Quadratwurzel aus der zweitheiligen Grösse $a+b$ anzudeuten schreibt man: $\sqrt{(a+b)}$, oder $\sqrt{a+b}$, oder $(a+b)^{\frac{1}{2}}$. Anfänger pflegen oft $\sqrt{(a+b)}$ mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ zu verwechseln. Den grossen Unterschied zeigen folgende Zahlen-Beispiele:

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=7;$	$\sqrt{25}-\sqrt{16}=1;$
$\sqrt{(16+9)}=5;$	$\sqrt{(25-16)}=3;$
$16+\sqrt{9}=19;$	$\sqrt{16}+9=13.$

Hinsichtlich der Wurzel-Ausziehung merke man noch: da jede Potenz einer eintheiligen Grösse wieder eintheilig ist, das Quadrat einer zweitheiligen Grösse aber drei Theile hat, worunter zwei vollkommene positive Quadrate, und der Cubus einer zweitheiligen Grösse vier Theile hat, worunter zwei Cuben sind, so folgt, dass

aus keiner zweitheiligen Grösse eine Quadratwurzel möglich ist, und dass die Quadratwurzel aus einer dreitheiligen Grösse, wenn sie überhaupt möglich ist, immer zweitheilig sein muss. Diese beiden Theile findet man dann leicht aus den beiden Gliedern, welche vollkommene Quadrate sind; denn die Wurzeln aus beiden gezogen und durch das Vorzeichen des dritten Gliedes vereinigt, müssen, in's Quadrat erhoben, dem vorgegebenen vollkommen gleich sein, wo nicht, so ist die Wurzel als irrational zu betrachten. Ein Gleiches gilt von der Cubicwurzel. Beispiele (vergl. § 324):

$$\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=x+y;$$

$$\sqrt{9x^2-6xy+y^2}=\sqrt{(3x-y)^2}=3x-y;$$

$$\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2};$$

$$\sqrt{(1-2x+x^2)}=\sqrt{(1-x)^2}=1-x;$$

$$\sqrt{x^2-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{4}{9}}=\sqrt{(x-\tfrac{2}{3})^2}=x-\tfrac{2}{3};$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a^2+4ax+x^2}&=\sqrt{a^2+4ax+x^2}\\ \sqrt{x^2+2xy-y^2}&=\sqrt{x^2+2xy-y^2}\\ \sqrt{a^2+b^2}&=\sqrt{a^2+b^2}\\ \sqrt{a^2-b^2}&=\sqrt{(a+b)(a-b)}\end{aligned}\right\}\text{ Wurzelgrössen (§ 211.)}$$

$$\sqrt{(a+b)^2(a-b)^2}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$\sqrt{(x+y)^3}=\sqrt{(x+y)^2(x+y)}=(x+y)\sqrt{x+y};$$

$$\sqrt[3]{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)}=\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y;$$

$$\sqrt[3]{(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)}=\sqrt[3]{(a-x)^3}=a-x;$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[3]{(a^3+b^3)}&=(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}\\ \sqrt[3]{(a^3-y^3)}&=(a^3-y^3)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\}\text{ Wurzelgrössen}$$

215.

Folgende Reductionen und Form-Veränderungen verdienen noch beachtet zu werden:

1) Wenn der Nenner eines Bruchs eine eintheilige Wurzelgrösse ist, so kann man denselben rational machen, indem man Zähler und Nenner mit einer solchen gebrochenen Potenz des Nenners multiplicirt, wodurch das Wurzelzeichen im Nenner wegfällt; z. B.:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{72}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a\cdot b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{b^2};$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2};\qquad \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a};\qquad \frac{a}{\sqrt[3]{a}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2};$$

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{(a+x)(a-x)}}{a-x}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x};$$

2) Ist der Nenner eine zweitheilige Wurzelgrösse, aber nur vom 2ten Grade, so muss man das Vorzeichen von einem Gliede entgegengesetzt nehmen. (§ 143.) Beispiele:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y};$$

$$\frac{x}{a+\sqrt{x}}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{a^2-x}$$

3) Wurzelgrössen kann man immer auf einerlei Nenner bringen; z. B.:

$$\sqrt{ax}-\frac{ax}{a+\sqrt{ax}}=\frac{(a+\sqrt{ax})\sqrt{ax}-ax}{a+\sqrt{ax}}=\frac{a\sqrt{ax}}{a+\sqrt{ax}};$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

4) Verschiedene Reductionen:

$$\frac{\sqrt{9y^2(a^2-x^2)}}{y\sqrt{a+x}}=\frac{3y\sqrt{(a+x)\cdot(a-x)}}{y\sqrt{a+x}}=3\sqrt{a-x};$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\sqrt{\frac{(x-y)(x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)}}=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}};$$

$$(a+x)^m(a+x)^n=(a+x)^{m+n};\qquad \frac{(a+x)^m}{(a+x)^n}=(a+x)^{m-n};$$

$$((a+x)^m)^n=(a+x)^{mn};\qquad \sqrt[n]{(a+x)^m}=(a+x)^{\frac{m}{n}};$$

$$a^m\left(1+\frac{x^m}{a^m}\right)=a^m+x^m;\quad a^m-x^m=a^m\left(1-\frac{x^m}{a^m}\right);$$

$$\sqrt[3]{(a^3-x^3)}=a\sqrt[3]{\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)};\quad \sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)};$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b;\ \text{folglich ist auch:}$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b};\quad \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b};$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{x^2+2x+1-4}{x^2+4x+4+x+2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+2)^2+x+2};$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+2)(x+2+1)}=\frac{x-1}{x+2}.$$

216.

Bei der Berechnung der Potenzen und Wurzeln hat man endlich noch auf die Vorzeichen derselben zu achten. Die Sätze darüber, welche wir absichtlich bis zu Ende dieses Capitels verschoben haben, sind folgende fünf:

1) Von einer positiven Grösse ist jede Potenz wieder positiv, $(+a)^n=+a^n$.

2) Von einer negativen Grösse aber ist jede grade Potenz positiv, jede ungrade negativ; denn eine grade Anzahl Factoren mit dem Minus-Zeichen geben plus, eine ungrade Anzahl aber minus; z. B.

$$(-3)^2=9,\ \text{denn}\ (-3)^2=-3\cdot-3=9;$$

$$(-3)^3=-3\cdot-3\cdot-3=9\cdot-3=-27;$$

$$(-3)^4=\overbrace{-3\cdot-3}\cdot\overbrace{-3\cdot-3}=9\cdot9=81.$$

Bedeutet n eine beliebige ganze Zahl, so ist $2n$ immer eine grade und $2n+1$ eine ungrade Zahl und daher allgemein:

$$(-a)^{2n}=+a^{2n};\quad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

Beispiele:

$$(-2)^3=-8;\quad (-2)^4=16;\quad (-\tfrac{1}{3})^2=\tfrac{1}{9};$$

$$(-a)^{10}=+a^{10};\quad (-a)^{11}=-a^{11};\quad (-4)^2=16.$$

Man muss also $-a^2$ wohl von $(-a)^2=a^2$ unterscheiden, $-a^2$ lies: minus a quadrat; $(-a)^2$ lies: minus a in's quadrat. Eben so $\frac{1}{2}a^2$ lies: halb a quadrat; aber $(\frac{1}{2}a)^2$ lies: halb a in's quadrat, $=\frac{1}{4}a^2$.

3) Umgekehrt folgt, dass jede ungrade Wurzel aus einer positiven Grösse nicht anders als positiv, aus einer negativen Grösse aber

nur negativ sein kann; z. B.: $\sqrt[3]{(+8)}=+2$; $\sqrt[3]{(-8)}=-2$; $\sqrt[3]{-27}=-3$, denn nur $(+2)^3$ giebt wieder $+8$, und nur $(-2)^3$ kann wieder -8 geben &c.

Allgemein:

$$\sqrt[2n+1]{(+a)}=+\sqrt[2n+1]{a};\quad \sqrt[2n+1]{(-a)}=-\sqrt[2n+1]{a}.$$

4) Jede **grade** Wurzel aus einer **positiven** Zahl kann hiernach sowohl negativ als positiv sein, indem sowohl von einer negativen als positiven Grösse jede grade Potenz positiv ist. Da z. B. $(+3)^2=(-3)^2=9$, so ist umgekehrt $\sqrt{9}=\pm 3$, lies: plus oder minus 3. Eben so $\sqrt{4}=\pm 2$; $\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$; $\sqrt{16}=\pm 4$; $\sqrt[4]{81}=\pm 3$, denn $(+3)^4=(-3)^4=+81$.

Allgemein:

$$\sqrt[2n]{(+a)}=\pm\sqrt[2n]{a}.$$

Anmerkung In den vorhergehenden und den meisten nachfolgenden Beispielen ist der Einfachheit wegen nur ein und zwar das obere Vorzeichen gesetzt. In der Praxis darf man aber nie vergessen, vor jede ausgezogene **grade** Wurzel, so lange man noch nicht weiss, welches Vorzeichen ihr zukommt, immer das doppelte Vorzeichen zu setzen. Andere vorliegende Umstände müssen dann erst entscheiden, ob das obere oder untere Zeichen der Natur der Sache gemäss, vorzugsweise gilt, oder ob es gleichgültig ist, in welchem Sinne eine Wurzel mit doppeltem Vorzeichen genommen wird. Stellt sich z. E. im Laufe der Rechnung das Wurzelzeichen mit gradem Exponenten vor eine aus $-a$ enstandene gleich hohe grade Potenz, so darf nur, eben weil man es weiss, das untere Zeichen genommen werden, und umgekehrt; z. B.:

$$\sqrt{-a\cdot -a}=\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a.$$

*5) Endlich kommt noch der Fall vor, dass sich das Wurzelzeichen mit gradem Exponenten vor eine negative Zahl stellt, z. B.: $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt{-a}$; oder, da jede grade Wurzel das doppelte Vorzeichen haben muss, $\pm\sqrt{-4}$; $\pm\sqrt{-a}$ &c. Da nun aber keine Zahl, sie möge $+$ oder $-$ zum Vorzeichen haben, auf eine grade Potenz erhoben, eine negative Zahl geben kann, so folgt sogleich, dass aus einer negativen Zahl eine grade Wurzel nicht wirklich gezogen, sondern nur angedeutet werden kann; z. B.: $\sqrt{-4}=\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-5}=\sqrt[4]{-5}$; $\sqrt[6]{-a}=\sqrt[6]{-a}$; denn es ist keine positive oder negative Zahl denkbar, welche auf die 2te, 4te oder 6te Potenz &c. erhoben, -4, -9, -5 &c. geben könnte. Solche Grössen-Ausdrücke, wie $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a^2}$ nennt man **imaginaire** (richtiger **laterale**) Grössen. (S. § 325.)

Siebzehntes Buch.

Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

217.

Erklärung. Wenn in einer von Klammern und Nenner befreiten Gleichung die daraus zu bestimmende unbekannte Grösse nur in der ersten Potenz vorkommt, so heisst die Gleichung eine einfache, oder vom ersten Grade; wenn die unbekannte Grösse aber in einer höheren Potenz darin vorkommt, eine höhere algebraische Gleichung, deren Grad der höchste Exponent der unbekannten Grösse bestimmt. Ferner heisst eine höhere Gleichung rein oder verwickelt, je nachdem die unbekannte Grösse nur in einerlei oder verschiedenen Potenzen darin enthalten ist. So sind z. B.:

$2x=6$ $3x-7=14-x$	Gleichungen ersten Grades oder einfache Gleichungen.
$x^2=9$ $2x^2+16=\frac{6}{5}x^2$	reine Gleichungen zweiten Grades oder reine quadratische Gleichungen.
$x^2+2x=16$ $8-\frac{3}{4}x=6x^2$	verwickelte quadratische Gleichungen, weil in diesen Gleichungen die unbekannte Grösse ausser in ihrer zweiten auch noch in der ersten Potenz darin vorkommt.
$x^3=27$ $x^3+\frac{136}{81}-7x^3=-\frac{2}{3}x^3$	reine Gleichungen vom dritten Grade oder reine cubische Gleichungen.
Allgemein: $x^n=a$ $ax^n+bx^n=c-dx^n$	reine Gleichungen vom $n$ten Grade.
$x^n+ax^{n-1}=x+b$;	verwickelte Gleichung vom $n$ten Grade.

Die allgemeine Theorie der höheren Gleichungen gehört in die Analysis. In den Elementen kommen bloss reine Gleichungen und ausserdem noch die verwickelten quadratischen Gleichungen vor.

218.

Die Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen hat keine Schwierigkeit, indem man sehr leicht das Quadrat der unbekannten

Grösse (x^2) von Nenner und Coefficienten befreien und mit dem Vorzeichen $+$ auf eine Seite allein schaffen kann und dann nur auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszuziehen braucht. Hat man nämlich die reine quadratische Gleichung erst auf die allgemeine Form

$$x^2 = q$$

reducirt, wo x die unbekannte und q die bekannten oder gegebenen Grössen bedeutet, so folgt, wenn man auf beiden Seiten die Wurzel auszieht:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$$

oder: $x = \pm\sqrt{q}$. (§ 216, 4.)

Ein Werth, welcher, statt der gesuchten Grösse substituirt, der Gleichung Genüge leistet, heisst Wurzel der Gleichung. Die reine quadratische Gleichung hat also immer zwei gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln, nämlich $x = +\sqrt{q}$ und $x = -\sqrt{q}$.

1. **Aufgabe.** Welchen Werth (Werthe) hat x in folgender Gleichung:

$$2x^2 - 3 = 69.$$

Auflösung. Man hat gleich: $2x^2 = 72$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = \pm 6.$$

Sowohl $+6$ als -6 leistet, statt x gesetzt, obiger Gleichung Genüge.

2. **Aufgabe.** Aus folgender Gleichung x zu finden:

$$\frac{x^2}{4} + 7 - \frac{2x^2}{3} = \frac{5x^2}{6} - 153.$$

Auflösung. Alle Glieder, welche x^2 enthalten, diesseits, die bekannten Glieder jenseits gebracht, kommt:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{2x^2}{3} - \frac{5x^2}{6} = -160.$$

Mit dem allgemeinen Nenner 12 multiplicirt, kommt:

$$3x^2 - 8x^2 - 10x^2 = -12.160.$$

Die Coefficienten von x^2 in Eins zusammengezogen:

$$-15x^2 = -12.160$$

$$x^2 = \frac{12.160}{15} = 128$$

mithin: $x = \pm\sqrt{128}$

also: $x = 11{,}313\ldots$ oder auch: $x = -11{,}313.$

3. **Aufgabe.** Den Werth von x durch die Grössen a, b, c, h, m, n auszudrücken. Den Zusammenhang aller Grössen stellt folgende Gleichung dar:

$$\frac{ax^2}{m}+h-\frac{bx^2}{n}=-\frac{ax^2}{n}+\frac{ab}{c}-\frac{cx^2}{m}$$

Auflösung. Das Unbekannte vom Bekannten getrennt, kommt:

$$\frac{ax^2}{n}-\frac{bx^2}{n}+\frac{cx^2}{m}+\frac{cx^2}{m}=\frac{ab}{c}-h.$$

Jetzt die Gleichung mit mn multiplicirt &c.:

$$amx^2-bmx^2+2cnx^2=mn\frac{(ab-ch)}{c}$$

$$(am-bm+2cn)x^2=mn.\frac{ab-ch}{c}$$

$$x^2=\frac{mn(ab-ch)}{c(am-bm+2cn)}$$

folglich: $x=\pm\sqrt{\frac{mn(ab-ch)}{c(am-bm+2cn)}}$

4. Aufgabe. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, dass, wenn man die um 4 vergrösserte Zahl durch 3 dividirt, dasselbe kommt, als wenn man 3 durch die um 4 verminderte Zahl dividirt.

Auflösung. Heisst x die fragliche Zahl, so soll laut Bedingung der Aufgabe folgende Gleichung statt finden:

$$\frac{x+4}{3}=\frac{3}{x-4}$$

multiplicirt mit dem allgemeinen Nenner $3(x-4)$, kommt:

$$(x+4)(x-4)=9$$
$$x^2-16=9$$
$$x^2=25$$
$$x=\pm 5$$

Nimmt man das obere Zeichen, so ist:

$$\frac{5+4}{3}=\frac{3}{5-4}=3.$$

Nimmt man das untere Zeichen, so ist:

$$\frac{-5+4}{3}=\frac{3}{-5-4}=-\tfrac{1}{3}.$$

219.

Auf gleiche Weise, wie die reine quadratische, wird auch jede andere reine Gleichung vom beliebigen $n$ten Grade gelöst, indem man erst die $n$te Potenz der unbekannten Grösse auf eine Seite allein bringt, und dann nur auf beiden Seiten die $n$te Wurzel zieht, welches, wie wir § 234 zeigen werden, mit Hülfe der Logarithmen nur ein Spiel ist. Wenn nun auch, streng genommen, eine reine

Gleichung vom $n$ten Grade immer n Wurzeln hat, und mithin n verschiedene Werthe, statt der unbestimmten Grösse substituirt, derselben Genüge leisten müssen,*) so kann doch die Elementar-Arithmetik nur die reellen Wurzeln angeben; die übrigen Wurzeln der reinen Gleichungen, welche imaginaire (complexe) Grössen sind, können nur durch höhere Mathematik gefunden werden. So findet man z. B. aus folgender Gleichung:

$$x^3 + \frac{136}{81} - 7x^3 = -\tfrac{1}{3}x^3$$

leicht den reellen Werth von x. Es ist nämlich:

$$x^3 - 7x^3 + \tfrac{1}{3}x^3 = -\frac{136}{81}$$

$$-5\tfrac{2}{3}x^3 = -\frac{136}{81}$$

$$\frac{17x^3}{3} = \frac{136}{81}$$

$$x^3 = \frac{3 \cdot 136}{81 \cdot 17} = \frac{8}{27}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Aus: $x^{30} + 30x^{30} = 10$

folgt: $x^{30} = \frac{10}{31}$

$$x = \sqrt[30]{\left(\frac{10}{31}\right)} \text{ \&c.} \qquad (\S\ 284.)$$

220.

Verwickelte quadratische Gleichungen. Die Auflösung dieser Art Gleichungen, welche zuerst ein Araber (Mohamed-Ben-Musa) gefunden haben soll, beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man kann und muss nämlich (indem man alle Glieder, welche das Quadrat

*) Die Gleichung $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x = 12$ z. B. hat die vier Wurzeln $1, 2, -2, 3$. Die Gleichung: $x^3 = 8$ hat drei Wurzeln, nämlich: $2, -1 + \sqrt{-3}, -1 - \sqrt{-3}$. Die Gleichung: $x^4 = 4$ hat vier Wurzeln, nämlich: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{-2}, -\sqrt{-2}$.

der unbekannten Grösse und eben so alle Glieder, welche die erste Potenz derselben enthalten, jedes in Eins zusammenzieht), die verwickelten quadratischen Gleichungen immer erst so ordnen, dass sie nur drei Glieder haben, und zwar so, dass das Quadrat der unbekannten Grösse, ohne Nenner und Coefficienten und mit dem Vorzeichen +, voransteht, darauf die unbekannte Grösse in der ersten Potenz mit ihrem Coefficienten folgt, und auf der andern Seite bloss die bekannten oder gegebenen Grössen stehen, durch welche x bestimmt werden soll, so dass also die Gleichung immer folgende Form erhält:

$$x^2 + px = q$$

wo p und q bekannte Grössen bedeuten, die den Umständen nach positiv oder negativ, ganze oder gebrochene Zahlen sein können

Um z. B. die Gleichung:

$$\frac{2x}{3} + 10\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}x^2 = 2x^2 + 10 - 3x$$

auf die angegebene Form zu bringen, hat man erst:

$$\frac{3x^2}{4} - 2x^2 + \frac{2x}{3} + 3x = -\tfrac{1}{4}.$$

Jetzt die Unbekannte von ihren Nennern befreit:

$$9x^2 - 24x^2 + 8x + 36x = -\tfrac{1}{4} \cdot 12$$
$$-15x^2 + 44x = -3$$
$$15x^2 - 44x = 3$$
$$x^2 - \frac{44}{15}x = \frac{3}{15}$$

Eben so lässt sich die Gleichung:

$$\frac{cx}{n} + c - \frac{bx^2}{m} = \frac{hx}{c} - \frac{ax^2}{n} + d$$

leicht ordnen. Es folgt aus ihr:

$$\frac{ax^2}{n} - \frac{bx^2}{m} + \frac{cx}{n} - \frac{hx}{c} = d - c$$

$$macx^2 - nbcx^2 + mc^2x - mnhx = mnc\,(d - c)$$
$$(mac - nbc)x^2 + m\,(c^2 - nh)\,x = mnc\,(d - c)$$
$$x^2 + \frac{m\,(c^2 - nh)}{c\,(ma - nb)} \cdot x = \frac{mnc\,(d - c)}{c\,(ma - nb)}$$

221.

Nachdem man nun, um eine verwickelte quadratische Gleichung aufzulösen, dieselbe erst, wie im vorigen § gezeigt, auf die dazu nöthige Form:

$$x^2 + px = q \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

gebracht hat, betrachte man jetzt die beiden links stehenden Glieder $x^2 + px (= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}px)$ als das Bruchstück eines Quadrats und addire den zur Vollständigkeit fehlenden dritten Theil (welcher nach § 213 offenbar stets das Quadrat vom halben Coefficienten von x, nämlich $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$ sein muss) auf beiden Seiten der Gleichung (1), so wird dadurch die gesuchte unbekannte Grösse x nicht geändert.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q \ldots\ldots (2)$$

Auf der linken Seite steht nun ein vollkommenes Quadrat, *) aus welchem sich die zweitheilige Wurzel $x + \frac{p}{2}$ ziehen lässt. Zieht man also jetzt auf beiden Seiten die Wurzel (welche Operation, so lange p und q nicht in bestimmten Zahlen gegeben, auf der rechten Seite bloss angedeutet werden kann [vergl. § 214]), so erhält man eine Gleichung ersten Grades. Aus (2) folgt nämlich:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \qquad \text{(§ 216, 4. Anmk.)}$$

$$\text{hieraus: } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)}$$

oder auch, indem man die Grösse unter dem Wurzelzeichen auf gleiche Benennung bringt und aus dem Nenner die Wurzel zieht:

---

*) Dass durch die erwähnte Zulage auf beiden Seiten, die linke Seite immer ein vollkommenes Quadrat werden muss, können Anfänger sich auf folgende Weise klar machen: da das entwickelte Quadrat einer zweitheiligen Grösse, wovon der erste Theil x heisst, aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Producte des ersten und zweiten Theils, und dem Quadrate des zweiten Theils besteht, z. B. $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, so ist klar, dass der Coefficient von x immer das Doppelte vom zweiten Theil der Wurzel ist. Betrachtet man also die Grösse: $x^2 + 2ax$ als die beiden ersten bekannten Theile eines vollständig zu machenden Quadrats, so muss offenbar der hinzukommende Theil das Quadrat vom halben Coefficienten von x, nämlich: $\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$ sein.

Um also $x^2 + 6x = x^2 + 2.3x$ zu einem vollständigen Quadrate zu machen, muss man $(\frac{6}{2})^2 = 3^2 = 9$ zulegen, alsdann hat man $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

Um $x^2 - 6x = x^2 - 2.3x$ zu einem Quadrate zu machen, muss man $(-\frac{6}{2})^2 = (-3)^2 = 9$ hinzulegen (die Zulage ist nämlich immer positiv, weil sie ein Quadrat ist), dann ist $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Zu $x^2 - px = x^2 - 2.\frac{1}{2}px$ muss also $(\frac{1}{2}p)^2$ hinzukommen. Zu $x^2 + 3x (= x^2 + 2.\frac{3}{2}x)$ muss $(\frac{3}{2})^2$; zu $x^2 - x (= x^2 - 2.\frac{1}{2}x)$ muss $(\frac{1}{2})^2$; zu $x^2 - \frac{ab}{c}x (= x^2 - 2.\frac{ab}{2c}x)$ muss $\left(\frac{ab}{2c}\right)^2$ hinzukommen &c.

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

222.

1. Aufgabe. Welche Werthe von x leisten folgender Gleichung Genüge?

$$5x^2 = 30x - 40 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung erst geordnet (§ 220), führt auf:

$$5x^2 - 30x = -40$$
$$x^2 - 6x = -8 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$x^2 - 6x + 3^2 = 9 - 8$$
$$\text{oder } x^2 - 6x + 3^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x - 3 = \pm 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$x = 3 \pm 1$$

Die beiden gesuchten Werthe von x sind also: $x = 3 + 1 = 4$ und $x = 3 - 1 = 2$, welche beide, statt x gesetzt, der gegebenen Gleichung (1) Genüge leisten. Dass dies nothwendig sei, folgt daraus, dass man eine Kette von Schlüssen auch rückwärts durchlaufen kann, und wieder auf die Voraussetzungen treffen muss, von welchen man ausging. Quadrirt man beide Seiten der Gleichung (4), so folgt die Gleichung (3) &c., man möge dabei das obere oder untere Zeichen von $\pm$ zu Grunde legen.

Es würde ganz auf dasselbe führen und folglich überflüssig sein, wenn man auch die Wurzel aus der linken Seite der Gleichung (3) mit dem doppelten Vorzeichen schreiben wollte. Denn nimmt man von $\pm(x - 3) = \pm 1$, das untere Zeichen linker Hand, so folgt aus $-(x - 3) = \pm 1$ wiederum $x = 3 \mp 1$.

223.

2. Aufgabe. Die Werthe von x aus folgender Gleichung zu finden:

$$\frac{2x}{3} + 10\tfrac{1}{4} + \frac{3x^2}{4} = 2x^2 + 10 - 3x \ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung gehörig geordnet (§ 220), kommt:

$$x^2 - \frac{44}{15}x = \frac{3}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auf beiden Seiten $\left(\frac{22}{15}\right)^2$ addirt:

$$x^2 - \frac{44}{15}x + \left(\frac{22}{15}\right)^2 = \frac{22^2}{15^2} + \frac{3}{15} \ldots\ldots (3)$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, kommt:

$$x - \frac{22}{15} = \pm\sqrt{\left(\frac{22^2}{15^2} + \frac{3}{15}\right)} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Um rechter Hand die Wurzel wirklich auszuziehen, muss die zweitheilige Grösse unter dem $\sqrt{}$ Zeichen erst in eine eintheilige verwandelt, folglich erst gleichnamig gemacht werden. (§ 214.) Da nun:

$$\frac{22^2}{15^2}+\frac{3}{15}=\frac{22^2}{15^2}+\frac{15.3}{15^2}=\frac{484+45}{15^2}=\frac{529}{15^2}, \text{ so ist:}$$

$$x-\frac{22}{15}=\pm\sqrt{\frac{529}{15^2}}$$

$$x=\frac{22\pm\sqrt{529}}{15}$$

$$x=\frac{22\pm 23}{15}$$

Der eine Werth von x ist also: $=\frac{22+23}{15}=3$ und der andere $=\frac{22-23}{15}=-\frac{1}{15}$.

224.

3. Aufgabe. Folgende Gleichung auf x zu reduciren:

$$acx-bcx=ab-c^2x^2 \;\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Diese Gleichung geordnet, giebt:

$$c^2x^2+c(a-b)x=ab$$

$$x^2+\frac{a-b}{c}.x=\frac{ab}{c^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2+\frac{a-b}{c}.x+\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4c^2}+\frac{ab}{c^2}$$

$$x+\frac{a-b}{2c}=\pm\sqrt{\frac{(a-b)^2+4ab}{4c^2}}$$

Löst man die Klammer unter dem Wurzelzeichen, so ist:

$$(a-b)^2+4ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

und folglich: $x=\dfrac{b-a\pm(a+b)}{2c}$

Nimmt man das obere Zeichen, so ist der eine Werth von $x=\frac{b}{c}$; das untere Zeichen bestimmt den andern Werth von $x=-\frac{a}{c}$ und beiderlei Werthe müssen, als Probe einer fehlerfreien Rechnung, statt x gesetzt, der Gleichung (1) Genüge leisten.

225.

4. Aufgabe. Ein Vermögen von 16000 Thlr. soll unter eine gewisse Anzahl Erben gleichmässig vertheilt werden. Wären zwei

[illegible] Tür mehr erhalten; wie viel [illegible]

[illegible] $\frac{[illegible]}{x}$. Wenn nun [illegible] $\frac{[illegible]}{x-2}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] multiplicirt man mit $x(x-2)$, so kommt: [illegible]

[illegible]

$$x^2 - 2x + 1 = 9$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{9}$$

$$x = 1 + 3$$

$$x = 4$$

[illegible] Werth zu finden, welcher der obigen Gleichung [illegible] auch $x = 1 - 3 = -2$ nehmen können. Da aber [illegible] gefragt wird, und negative oder inverse Personen [illegible] keine positive giebt, so sieht man den Grund, [illegible] obere Zeichen genommen werden musste. (Vergl. [illegible])

226.

[illegible] Aufgabe. Eine Dame wurde um ihr Alter befragt und sie antwortete: das [illegible]fache meiner Jahre übertrifft die Zahl 696 um gerade so viel, als das Quadrat meiner Jahre beträgt. Wie alt war die Dame?

Auflösung. Man setze x Jahre, so muss laut Bedingung folgende Gleichung Statt finden:

[illegible]

$$x^2 - 53x = -696$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Hier muss aus Höflichkeit das untere Zeichen genommen werden.*)

227.

6. Aufgabe. Eine Linie von $a=10$ Zoll Länge in zwei solche Theile zu theilen, dass sich der kleinere Theil zum grössern verhält, wie der grössere zur ganzen Länge.

Auflösung. Sei x der kleinste, mithin $a-x$ der grösste, so muss, weil $\frac{a-x}{x}$ denselben Quotienten geben soll, wie $\frac{a}{a-x}$, folgende Gleichung Statt finden:

$$\frac{a-x}{x}=\frac{a}{a-x}$$

$$(a-x)(a-x)=ax$$

$$a^2-2ax+x^2=ax$$

$$x^2-2ax-ax=-a^2$$

$$x^2-3ax=-a^2$$

$$x^2-3ax+\left(-\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{9a^2}{4}-a^2$$

$$\left(x-\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}$$

$$x-\frac{3a}{2}=\frac{\sqrt{5a^2}}{2}$$

folglich: $x=\frac{3a\pm a\sqrt{5}}{2}$

oder $x=a\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)=a\left(\frac{3\pm 2{,}236\ldots}{2}\right)=(0{,}382\ldots)a$

Mithin ist der kleinste Theil $x=(0{,}382\ldots)a$, und der grösste Theil $a-x=a-(0.382\ldots)a=(0.618\ldots)a$, oder, weil hier $a=10$ gegeben ist, $x=3.82\ldots$ Zoll und $a-x=6.18\ldots$ Zoll.

Hier musste offenbar deshalb das untere Zeichen genommen werden, weil das obere Zeichen den gesuchten kleinern Theil x grösser als die ganze Linie, und mithin den grössern Theil $a-x$ negativ gemacht hätte, welches beides ungereimt wäre. Käme es aber bloss darauf an, Werthe für x zu finden, welche der Gleichung Genüge leisten, oder würde die Frage so gestellt: die Zahl $a=10$ in zwei Theile zu theilen, welche die erwähnte Eigenschaft haben, so kann man gleichgültig das obere oder untere Zeichen nehmen. Uebrigens sind hier beide Werthe von x irrational und deshalb nur näherungsweise anzugeben.

228.

7. Aufgabe. Welche Werthe leisten, statt x substituirt, folgender Gleichung Genüge:

$$x^2=2x-5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

---

*) Anfänger pflegen sich darüber zu wundern, dass die Auflösung hier zwei Antworten giebt und dies für eine Unvollkommenheit der Analysis zu halten. Es ist offenbar gerade eine ihrer Vollkommenheiten (und ein grosser Vorzug vor der Geometrie), dass ihre Resultate ganz allgemein sind, und dass sie alle möglichen Fälle und Antworten durch einen einzigen Ausdruck angiebt.

Auflösung. Man hat gleich:

$$x^2 - 2x = -5$$
$$x^2 - 2x + 1 = 1 - 5$$
$$(x-1)^2 = -4$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{-4}$$
$$\text{und } x = 1 \pm \sqrt{-4}\,^{*)}$$

229.

8. Aufgabe. Aus folgender Gleichung die durch a, b, c bestimmten Werthe von x zu finden:

$$\frac{bc}{a} - ax - c = \frac{bx^2}{a} - \frac{ax^2}{b} - bx$$

Auflösung. Es ist:

$$\frac{ax^2}{b} - \frac{bx^2}{a} - ax + bx = c - \frac{bc}{a}$$

Multiplicirt mit ab:

$$a^2x^2 - b^2x^2 - a^2bx + ab^2x = abc - b^2c$$
$$(a^2 - b^2)x^2 - ab(a-b)x = bc(a-b)$$
$$x^2 - \frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}.x = \frac{bc(a-b)}{a^2-b^2}$$
$$x^2 - \frac{ab}{a+b}.x = \frac{bc}{a+b} \qquad (\S\ 143.)$$
$$x^2 - \frac{ab}{a+b}.x + \left[\frac{ab}{2(a+b)}\right]^2 = \frac{a^2b^2}{4(a+b)^2} + \frac{bc}{a+b}$$
$$x - \frac{ab}{2(a+b)} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + 4bc(a+b)}}{2(a+b)}$$
$$x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 + 4bc(a+b)}}{2(a+b)}$$

230.

Kommt in einer Gleichung die unbekannte Grösse mit einem gebrochenen Exponenten oder mit dem Wurzelzeichen behaftet vor, so heisst die Gleichung irrational. Eine irrationale Gleichung lässt sich aber manchmal rational machen, wenn man die Wurzelgrösse erst

*) Substituirt man die für x gefundenen Ausdrücke in (1), so erhält man als Probe der richtigen Rechnung: $(1 \pm \sqrt{-4})^2 = 2(1 \pm \sqrt{-4}) - 5$; denn löst man die Klammern, so kommt:

$$1 \pm 2\sqrt{(-4)} - 4 = 2 \pm 2\sqrt{(-4)} - 5$$
$$-3 \pm 2\sqrt{-4} = -3 \pm 2\sqrt{-4}. \qquad \text{(Siehe § 325.)}$$

auf eine Seite allein schafft, und dann beide Seiten auf die dem Wurzelexponenten entgegengesetzte Potenz erhebt. (Wenn man beide Seiten einer Gleichung in's Quadrat (Cubus &c.) erhebt, so wird dadurch die unbekannte Grösse eben so wenig geändert, als wenn man auf beiden Seiten mit einerlei Zahl multiplicirt). So folgt z. B. aus der Gleichung:

$$ax = b \pm \sqrt{x}$$

$$ax - b = \pm \sqrt{x}$$

Erhebt man jetzt beide Seiten in's Quadrat, so fällt, weil $(\pm\sqrt{x})^2 = x$, das Wurzelzeichen weg und man erhält dadurch die rationale Gleichung:

$$a^2x^2 - 2abx + b^2 = x$$

$$a^2x^2 - 2abx - x = -b^2$$

$$x^2 - \frac{(1+2ab)}{a^2}x = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$x - \frac{1+2ab}{2a^2} = \pm\sqrt{\left\{\frac{(1+2ab)^2}{4a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right\}}$$

$$x = \frac{1+2ab \pm \sqrt{(1+2ab)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}$$

$$x = \frac{1+2ab \pm \sqrt{1+4ab}}{2a^2}$$

Hat eine Gleichung mehrere irrationale Glieder, so muss man das vorhergehende Verfahren wiederholen, und sie nach und nach rational machen, so folgt z. B. aus der Gleichung:

$$\sqrt{2x+7} = 2 + \sqrt{5-4x}$$

indem man beide Seiten in's Quadrat erhebt und beachtet, dass allgemein $[\sqrt{a+b}]^2 = a+b$; und $(a+\sqrt{b})^2 = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$; und $[a\sqrt{b-c}]^2 = a^2(b-c)$;

$$2x + 7 = 4 + 5 - 4x + 4\sqrt{5-4x}$$

$$6x - 2 = 4\sqrt{5-4x}$$

wiederum quadrirt:

$$36x^2 - 24x + 4 = 80 - 64x$$

$$36x^2 + 40x = 76$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x = \frac{19}{9}$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x + \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{9^2} + \frac{19}{9} = \frac{25 + 9 \cdot 19}{9^2}$$

$$x+\frac{5}{9}=\pm\frac{\sqrt{196}}{9}$$

$$x=\frac{-5\pm 14}{9}$$

$$x=1,\text{ und } x=-\frac{19}{9};$$

der eine Werth gilt für das obere, der andere für das untere Vorzeichen der gegebenen Gleichung, welche, weil die Wurzelexponenten grade sind, so zu lesen ist: $\pm\sqrt{2x+7}=2\pm\sqrt{5-4x}$.

231.

Auf gleiche Weise, wie die verwickelten quadratischen Gleichungen, können auch alle diejenigen höhern Gleichungen gelöst werden, welche sich auf die Form:

$$x^{2m}+px^m=q$$

bringen lassen, wo nämlich nur zweierlei Potenzen der unbekannten Grösse vorkommen, und zwar so: dass der grösste Exponent grade mal so gross ist, als der kleinste, indem dann eine solche Gleichung als eine wirklich quadratische dargestellt werden kann.

Setzt man nämlich: $x^m=z$, mithin: $x^{2m}=(x^m)^2=z^2$, so wird die Gleichung:

$$x^{2m}+px^m=q$$

wenn man einstweilen z statt x^m und z^2 statt x^{2m} substituirt, in folgende quadratische Gleichung verwandelt:

$$z^2+pz=q$$

hieraus: $$z=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

und wenn man für z dessen Werth x^m wieder zurücksetzt:

$$x^m=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

mithin: $$x=\sqrt[m]{\left\{\frac{-p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}\right\}}$$

wo auch vor die $m$te Wurzel, wenn sie grade ist, das doppelte Zeichen $\pm$ gesetzt werden muss. Beispiele:

232.

Aufgabe. Die Zahl 18 in zwei solche Factoren zu zerlegen, dass wenn man jeden Factor quadrirt, die Summe dieser Quadrate $=45$ ist.

Auflösung. Sei x der eine, mithin $\frac{18}{x}$ der andere Factor, so hat man:

$$x^2 + \frac{18^2}{x^2} = 45$$

$$x^4 + 18^2 = 45x^2$$

$$x^4 - 45x^2 = -324$$

also, indem man $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$ setzt:

$$z^2 - 45z = -324$$

$$z^2 - 45z + \left(\frac{45}{2}\right)^2 = \frac{45^2 - 4.324}{4}$$

$$z - \frac{45}{2} = \frac{\sqrt{729}}{2}$$

$$x^2 = \frac{45 \pm 27}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\left\{\frac{45 \pm 27}{2}\right\}}$$

Je nachdem man von den beiden doppelten Vorzeichen zwei gleiche oder zwei ungleiche nimmt, erhält man vier verschiedene Werthe für x, wovon jedoch, weil die Wurzelgrösse zweitheilig ist, zwei einander gleich sind. Man hat nämlich:

für: $+\,+$; $x = 6$ und $\frac{18}{x} = 3$

für: $+\,-$; $x = 3$ und $\frac{18}{x} = 6$

für: $-\,+$; $x = -6$ und $\frac{18}{x} = -3$

für: $-\,-$; $x = -3$ und $\frac{18}{x} = -6$

233.

Aufgabe. Die Zahl 12 in zwei solche Factoren zu zerlegen, dass die Differenz der Cuben $= 37$ sei.

Auflösung. Sei x der eine und folglich $\frac{12}{x}$ der andere Factor, so hat man:

$$x^3 - \frac{12^3}{x^3} = 37$$

$$x^6 - 12^3 = 37x^3$$

$$x^6 - 37x^3 = 12^3$$

und wenn man $x^3 = z$, und $x^6 = x^3 . x^3 = z^2$ setzt:

$$z^2 - 37z = 1728$$

$$z = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 + 4.1728}}{2}$$

$$\text{d. i. } x^3 = \frac{37 \pm \sqrt{8281}}{2}$$

$$\text{mithin } x = \sqrt[3]{\left(\frac{37 \pm 91}{2}\right)}$$

$$\text{also } x = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ oder auch } x = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\text{und } \frac{12}{x} = \frac{12}{4} = 3 \text{ oder auch } \frac{12}{x} = \frac{12}{-3} = -4$$

233 a.

* **Aufgabe.** Man suche x aus folgenden Gleichungen:

(1) $\frac{50}{2x+1} + 3 = \frac{8x-3}{9-4x}$; (2) $b = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$

(3) $\sqrt[2m]{2x^2 + 4ax - b^2} = \sqrt[m]{a+x}$ *) (4) $2x\sqrt[3]{x} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} = 20$ **)

Antwort. Man findet aus:

(1) $x = -2 \pm 4$; (2) $x = \pm \frac{2a\sqrt{b}}{1+b}$

(3) $x = -a \pm \sqrt{2a^2 + b^2}$; (4) $x = \pm 8, = \pm \sqrt{\frac{-125}{8}}$

234.

Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Grössen. Sind unter den n Gleichungen mit n unbekannten Grössen einige oder auch alle quadratisch, so muss man jede unbekannte Grösse durch Elimination der übrigen zu bestimmen suchen. Sind aber mehr als zwei Gleichungen vorhanden, so ist die Auflösung nur in besonders günstigen Fällen möglich.

235.

1. Aufgabe. Es ist gegeben die Summe zweier Zahlen x und y, $= s$, z. B. $= 10$ und ihr Product $= p$, z. B. $= 24$; wie lassen sich die beiden Grössen x und y durch s und p bestimmen?

Auflösung. Es ist:

$x + y = s$ .... (1)
$xy = p$ .... (2)

*) Beide Seiten auf die 2mte Potenz erhoben (§ 207).

**) Man schreibe die vierte Gleichung so: $2x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 20$ und setze $x^{\frac{2}{3}} = z$ &c. (§ 231.)

Die erste Gleichung mit x multiplicirt, kommt:

$$x^2+xy=sx \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

hievon die zweite subtrahirt, kommt:

$$x^2=sx-p$$

hieraus: $x^2-sx=-p$

$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2} \ldots (4)$$

substituirt in (1) kommt: $y=\dfrac{s\mp\sqrt{s^2-4p}}{2} \ldots (5)$

(Nimmt man von dem doppelten Zeichen $\pm$ für x das obere, so gilt das untere für y, und so umgekehrt.)

236.

2. Aufgabe. Es ist gegeben: die Summe zweier Grössen und die Summe ihrer Quadrate, nämlich:

$$x+y=a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x^2+y^2=b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Der kürzeste Weg ist hier: vom Quadrate der ersten Gleichung die zweite zu subtrahiren, dann kommt:

$$2xy=a^2-b \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Subtrahirt man (3) von (2), so kommt:

$$x^2-2xy+y^2=2b-a^2$$

$$x-y=\sqrt{2b-a^2} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus den Gleichungen (4) und (1) erhält man (§ 168, Anmerk.):

$$x=\frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

$$y=\frac{a\mp\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

237.

3. Aufgabe. Das Product p zweier Grössen und die Summe ihrer Quadrate a ist gegeben, nämlich:

$$xy=p \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x^2+y^2=a \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Die erste mit 2 multiplicirte Gleichung zur zweiten addirt und davon subtrahirt, erhält man leicht die Summe und Differenz der beiden gesuchten Grössen, nämlich:

$$x+y=\sqrt{a+2p} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$x-y=\sqrt{a-2p} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und hieraus nach § 168, Anmerkung:

$$x = \frac{\pm\sqrt{a+2p}\pm\sqrt{a-2p}}{2} \;\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{a+2p}\mp\sqrt{a-2p}}{2} \;\ldots\ldots\ldots (8)$$

oder wenn man die Gleichungen (5) und (6) quadrirt (§ 186):

$$x^2 = \frac{a+2p+a-2p\pm2\sqrt{a^2-4p^2}}{4} = \frac{a\pm\sqrt{a^2-4p^2}}{2}$$

folglich ist auch: $x = \pm\sqrt{\left\{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4p^2}}{2}\right\}}$ und $y = \pm\sqrt{\left\{\frac{a\mp\sqrt{a^2-4p^2}}{2}\right\}}$

238.

4. Aufgabe. Gegeben:

$$3x+2y=8 \;\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$4x^2-3y^2=13 \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

Auflösung. Den Werth von x aus (1) in (2) substituirt &c., kommt:

$$y=1,\; x=2, \text{ oder } y=-\frac{139}{11} \text{ und } x=\frac{122}{11}$$

239.

5. Aufgabe. Gegeben:

$$x^2+xy+y^2=7 \;\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y^2+yz+z^2=19 \;\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$x^2+xz+z^2=13 \;\ldots\ldots\ldots (3)$$

Auflösung. Subtrahire (2) von (1), und (2) von (3) kommt:

$$x+y+z=\frac{-12}{x-z}; \quad \frac{12}{x-z}=\frac{6}{x-y} \text{ giebt:}$$

$$x+y+z=\frac{-6}{x-y}; \quad x=2y-z$$

Den Werth von x in (3) gesetzt, vom Resultat die Gleichung (2) subtrahirt, kommt: $z=\frac{y^2+2}{y}$. Den Werth von z in (2) substituirt kommt:

$$y^4-\frac{13}{3}y^2=-\frac{4}{3}, \text{ woraus: (§ 231)}$$

$$y=\pm2,\; =\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\; z=\pm3,\; =\pm\frac{7}{\sqrt{3}};\; x=\pm1,\; =\mp\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Achtzehntes Buch.

Von den sogenannten arithmetischen und geometrischen Progressionen oder Zahlen-Reihen.

I. Arithmetische Progressionen.

240.

Eine jede Reihe von Zahlen, bei welcher ein solches Gesetz Statt findet, dass durchgehends einerlei Differenzen kommen, wenn man ein beliebiges Glied vom nächstfolgenden subtrahirt, heisst in der alten Kunstsprache eine arithmetische Reihe oder Progression, und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die folgenden Glieder immer grösser oder kleiner werden. Solcher arithmetischen Progressionen giebt es unzählige, z. B.:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ....(1)
5, 6, 7, 8, 9, 10 ....(2)
4, 9, 14, 19, 24, 29 ....(3)
8, 5, 2, —1, —4, —7 ....(4)

Wo bei der ersten und zweiten steigenden Progression die beständige Differenz 1 ist. Bei der dritten ist die beständige Differenz 5; bei der vierten fallenden Progression ist sie —3.

241.

Ist das Anfangs-Glied einer arithmetischen Progression und die beständige Differenz gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu einem beliebigen Gliede entwickeln: man erhält offenbar das zweite Glied, wenn man die Differenz zum ersten addirt, ferner das dritte, indem man die Differenz zu dem erhaltenen zweiten Gliede, oder, was dasselbe ist, die Differenz zweimal zum ersten addirt u. s. f.; z. B. das hundertste Glied, indem man die Differenz entweder einmal zum vorhergehenden neunundneunzigsten Gliede oder 99mal zum ersten addirt.

Soll z. B. 3 das Anfangs-Glied und 4 die Differenz sein, so hat man:

$$\underbrace{3}_{1},\quad \underbrace{3+4}_{2},\quad \underbrace{3+2\cdot4}_{3},\quad \underbrace{3+3\cdot4}_{4}\cdots\underbrace{3+9\cdot4}_{10\text{tes Glied}}\cdots$$

oder: $3,\quad 7,\quad 11,\quad 15\cdots\cdots 39\quad\cdots$

Soll 15 das erste Glied und -5 die Differenz sein, so hat man:

$$\underbrace{15}_{1},\quad \underbrace{15-5}_{2},\quad \underbrace{15-2\cdot5}_{3},\quad \underbrace{15-3\cdot5}_{4}\cdots\underbrace{15-19\cdot5}_{20\text{stes Glied}}\cdots$$

oder: $15,\quad 10,\quad 5,\quad 0,\quad \cdots -80\quad\cdots$

242.

Bei einer arithmetischen Reihe muss man sich folgende fünf Grössen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich: das Anfangsglied $=a$, die Differenz $=d$, das letzte oder Endglied $=t$ (*terminus*), die Anzahl der Glieder $=n$ (*numerus*), und endlich die Summe aller Glieder $=s$. Jede dieser fünf Grössen a, d, t, n, s ist eine bestimmte Function von irgend drei der übrigen, und kann, wenn letztere in Zahlen gegeben sind, sehr leicht daraus berechnet werden, ohne dass man zuvor die ganze Reihe zu entwickeln braucht. Die practisch wichtigsten und oft vorkommenden Fragen sind jedoch nur nach der Grösse eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

243.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man jedes beliebige Glied einer arithmetischen Reihe berechnen kann, wenn die Stellzahl n desselben (nämlich das wievielste es sein soll), das Anfangsglied a, und die Differenz d gegeben ist.

Auflösung. Da das 1ste Glied $=a$, so ist (§ 241) das 2te $=a+d$; das dritte $=a+2d$ &c., das $n$te Glied $=a+(n-1)\,d$. Bezeichnet man demnach die Grösse dieses $n$ten Gliedes mit t, so hat man sogleich:

$$t=a+(n-1)d \,\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

1) Sucht man z. B. das 21ste Glied der arithmetischen Reihe: 5, 8, 11...., so hat man hier; $a=5$; $d=3$; $n=21$.

$$t=5+(21-1)\,3$$

mithin: $t=5+20\,.\,3=65$

2) Wie gross ist das hundertste Glied der arithmetischen Reihe 10, $8\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$...; da hier $a=10$, $d=-\frac{5}{3}$ und $n=100$, so hat man:

$$t=10+(100-1)\left(-\tfrac{5}{3}\right)$$

$$t=10-165=-155.$$

244.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man aus dem ersten und letzten Gliede und der Anzahl der Glieder a, t, n die Summe s einer arithmetischen Reihe berechnen kann.

Auflösung. Betrachtet man die arithmetische Progression aus dem 1sten Gliede durch das schrittweise Zulegen der Differenz gebildet, so dass diesem Ursprunge gemäss, jedes folgende Glied die Differenz einmal mehr, als das nächst vorhergehende enthält, so folgt sogleich, dass je zwei vom Anfange und Ende gleich weit abstehende Glieder zusammenaddirt, einerlei Summe geben müssen, z. B. das erste und letzte, das zweite und vorletzte &c. Schreibt man z. B. die Reihe 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 zweimal unter einander, und zwar einmal in umgekehrter Ordnung, so dass sich das letzte Glied unter das erste, das vorletzte unter das zweite stellt &c., und addirt dann je zwei über einander stehende Glieder, so kommen lauter gleiche Summen, nämlich:

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19
19,	17,	15,	13,	11,	9,	7,	5,	3,	1
20,	20,			20,					20.

Heisst das 1ste Glied a, das letzte t, und die Differenz d, so ist das 2te Glied $a+d$, das vorletzte $t-d$, das 3te $a+2d$, das vorvorletzte $t-2d$ &c., mithin: $a+t=a+d+t-d=a+2d+t-2d$ &c.

Addirt man also das erste und letzte Glied einer arithmetischen Progression und multiplicirt die Summe mit der Anzahl der Glieder, so erhält man die doppelte Summe, folglich durch 2 dividirt, die einfache Summe der ganzen Reihe. Die gesuchte allgemeine Summationsformel ist mithin:

$$s=(a+t)\,\frac{n}{2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

1) Sucht man z. B. die Summe der ersten tausend Glieder der sogenannten natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3....1000; so ist hier $a=1$, $t=1000$ und $n=1000$, mithin:

$$s=(1+1000).\frac{1000}{2}=500500$$

2) Sucht man die Summe der folgenden zehn, eine arithmetische Reihe bildenden Zahlen 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12, so hat man $a=6$, $t=-12$, $n=10$ und

$$s=(6-12)\frac{10}{2}=-30.$$

245.

Da die bei einer arithmetischen Progression in Betracht kommenden fünf Grössen a, d, n, t, s und deren Zusammenhang in den beiden Gleichungen:

$$t = a + (n - 1)d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = (a + t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

enthalten sind, indem die Grössen, weil sie sich auf einerlei Reihe beziehen, in der einen Gleichung denselben Werth, wie in der andern haben, mithin beide zugleich Statt finden müssen, so ist klar, dass wenn von einer arithmetischen Progression irgend drei der fünf Grössen a, d, n, t, s gegeben sind, die beiden übrigen als unbekannt angesehenen Grössen leicht berechnet werden können, indem zu ihrer Bestimmung die beiden Gleichungen (1) und (2) vorhanden sind, woraus man die übrigen Formeln leicht ableiten kann. Sind nämlich die vier Grössen, von welchen drei gegeben und eine gesucht sein soll, alle in einer der beiden Grund-Formeln (1), (2) enthalten, so braucht man dieselbe offenbar nur auf die gesuchte unbekannte zu reduciren. Sind aber die vier Grössen in beide Gleichungen zerstreut, so muss man erst die fünfte Grösse eliminiren.

246.

1. Aufgabe. Zwischen 4 und 10 sollen acht Zahlen eingeschaltet (interpolirt) werden, so dass dann alle zehn Zahlen eine arithmetische Progression bilden.

Auflösung. Es ist gegeben: $a = 4$, $t = 10$, $n = 10$ und d gesucht. Alle vier Grössen a, t, n, d sind in der Grundformel $t = a + (n - 1)d$ enthalten; reducirt man diese auf die unbekannte Grösse d, so kommt:

$$d = \frac{t - a}{n - 1}$$

$$\text{also } d = \frac{10 - 4}{10 - 1} = \frac{2}{3}$$

die fragliche Progression ist mithin:

$4,\ 4\tfrac{2}{3},\ 5\tfrac{1}{3},\ 6,\ 6\tfrac{2}{3},\ 7\tfrac{1}{3},\ 8,\ 8\tfrac{2}{3},\ 9\tfrac{1}{3},\ 10.$

247.

2. Aufgabe. Auf einem Dache liegen 21 Reihen Ziegel; in jeder folgenden Reihe eine mehr, im Ganzen 588 Stück; wie viel liegen in der ersten Reihe?

Auflösung. Gegeben $n = 21$, $d = 1$, $s = 588$, und a gesucht. Diese vier Grössen n, d, s, a sind in keiner der beiden Grundformeln:

$$t = a + (n - 1)d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = (a + t)\frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

allein enthalten, sondern in beiden zerstreut. Man eliminirt also die fünfte Grösse t (am leichtesten, indem man den Werth von t aus (1) in (2) substituirt),

so erhält man eine von t befreite Gleichung, welche die vier Grössen n, d, s, a enthält, und die man also nur auf die unbekannte Grösse a zu reduciren braucht. Setzt man nämlich in (2) statt t die Grösse $a+(n-1)d$, so kommt:

$$s=[a+a+(n-1)d]\frac{n}{2}$$

woraus: $$\frac{2s}{n}=2a+(n-1)d$$

$$2a=\frac{2s}{n}-(n-1)d$$

$$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$$

daher: $$a=\frac{588}{21}-\frac{(21-1)}{2}1=18.$$

248.

3. Aufgabe. Es ist von einer arithmetischen Reihe das erste Glied $a=16$, die Differenz $d=32$, die Summe $s=1600$ gegeben. Wie viel Glieder hat die Reihe?

Auflösung. Die vier Grössen a, d, s, n, wovon die letzte aus den ersteren gesucht wird, sind in den beiden Grundformeln:

$$t=a+(n-1)d \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s=(a+t)\frac{n}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

enthalten. Eliminiren wir also die fünfte unbekannte und nicht gesuchte Grösse t, indem wir deren Werth aus (1) in (2) substituiren, so kommt:

$$s=[a+a+(n-1)d]\frac{n}{2}$$

Diese Gleichung muss nun auf die gesuchte unbekannte Grösse n reducirt werden. Man hat (§ 220):

$$2an+n(n-1)d=2s$$

$$n^2d+2an-dn=2s$$

$$n^2+\frac{(2a-d)n}{d}=\frac{2s}{d}$$

$$n=\frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2+\frac{2s}{d}}$$

$$n=\frac{32-2.16}{2.32}\pm\sqrt{\left(\frac{32-2.16}{2.32}\right)^2+\frac{2.1600}{32}}$$

$$n=\sqrt{\frac{2.1600}{32}}=10.$$

249.

4. Aufgabe. Von einer arithmetischen Progression ist das 1ste Glied $=a$, die Differenz $=d$ und die Summe aller Glieder $=s$ gegeben; man sucht die Formel für das Endglied t.

Auflösung Die beiden unbekannten Grössen t, n, der fraglichen Progression sind in den beiden Grundformeln:

$$t = a + (n-1)d \text{ .... } (1)$$

$$s = (a+t)\frac{n}{2} \text{ .... } (2)$$

zerstreut enthalten. Wir eliminiren also die nicht verlangte unbekannte Grösse n, indem wir am bequemsten ihren Werth aus (1) ziehen und in (2) substituiren.

$$n = \frac{t-a}{d} + 1$$

mithin: $s = (a+t) \cdot \frac{t-a+d}{2d}$

hieraus: $t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2ds + (a-\frac{1}{2}d)^2}$.

II. Geometrische Progressionen.

250.

Eine Zahlenreihe, bei welcher durchgehends ein solches Gesetz Statt findet, dass immer gleiche Quotienten kommen, wenn man mit einem beliebigen Gliede in das nächstfolgende dividirt, heisst in der alten Kunstsprache eine geometrische Progression und zwar eine steigende oder fallende, je nachdem die Glieder immer grösser oder kleiner werden. Der beständige Quotient heisst hier der Exponent der Reihe. Geometrische Reihen oder Progressionen sind z. B. folgende:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96 \ldots\ldots$$
$$9,\ 3,\ 1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27} \ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64} \ldots\ldots$$

wo bei der 1sten steigenden Progression 2 der Exponent ist, bei der 2ten fallenden Progression ist $\frac{1}{3}$, bei der 3ten $\frac{1}{2}$ der Exponent. Das sonderbare Beiwort „geometrisch“ ist hier noch weit sinnloser, als bei den Reihen von gleichen Differenzen das Beiwort „arithmetisch.“ Weniger unschicklich würde es noch gewesen sein, wenn man diese Benennungen geradezu mit einander verwechselt, die Reihen von beständiger Differenz geometrische und jene mit beständigem Quotienten arithmetische genannt hätte.

251.

Ist das Anfangs-Glied und der Exponent einer geometrischen Progression gegeben, so kann man die Reihe leicht bis zu jedem beliebigen Gliede entwickeln. Man erhält offenbar das 2te Glied, indem man das erste mit dem Exponenten multiplicirt, ferner das 2te Glied mit dem Exponenten, oder was dasselbe ist, das 1ste Glied mit der 2ten Potenz vom Exponenten multiplicirt, giebt das 3te Glied &c., das 99ste Glied mit dem Exponenten oder das 1ste Glied mit der 99sten Potenz vom Exponenten multiplicirt, giebt das 100ste Glied &c.

Soll z. B. 2 das erste Glied und 3 der Exponent sein, so kommt die Reihe:

$$\underset{1}{2};\quad \underset{2}{2\cdot 3};\quad \underset{3}{2\cdot 3^2};\quad \underset{4}{2\cdot 3^3};\quad \underset{5}{2\cdot 3^4}\cdots\cdot \underset{\text{10tes Glied}}{2\cdot 3^9}\cdots\cdot$$

oder: $2,\quad 6,\quad 18.\quad 54,\quad 162\cdots\cdots\cdots\cdots$

Soll 64 das erste Glied und $\frac{1}{2}$ der Exponent sein, so hat man:

$$\underset{1}{64},\quad \underset{2}{64\cdot\tfrac{1}{2}};\quad \underset{3}{64\cdot(\tfrac{1}{2})^2};\quad \underset{4}{64\cdot(\tfrac{1}{2})^3}\cdots\cdot \underset{10}{64\cdot(\tfrac{1}{2})^9}\cdots\cdot$$

oder: $64,\quad 32,\quad 16,\quad 8\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{8}\cdots\cdots$

252.

So wie bei der arithmetischen Reihe, muss man sich auch bei der geometrischen Reihe folgende fünf Grössen und deren übliche Bezeichnung merken, nämlich: das Anfangsglied $= a$, den Exponenten $= e$, die Anzahl der Glieder $= n$, das Endglied $= t$, und die Summe aller Glieder $= s$.

Jede dieser fünf Grössen ist eine bestimmte Function von je drei der übrigen, und kann, sobald diese drei in bestimmten Zahlen gegeben sind, daraus berechnet werden, ohne dass man die Reihe selbst zu entwickeln braucht. Die wichtigsten Fragen sind jedoch nach der Grösse eines bestimmten Gliedes und nach der Summe aller.

253.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Grösse t eines bestimmten Gliedes berechnen kann, wenn die St llzahl n desselben, das erste Glied a, und der Exponent e der Progression gegeben sind.

Auflösung. Nach § 251 ist die Reihe:

$$\underset{1}{a},\quad \underset{2}{ae},\quad \underset{3}{ae^2},\quad \underset{4}{ae^3},\quad \underset{5}{ae^4}\cdots\cdot \underset{\text{ntes Glied}}{ae^{n-1}}$$

Man hat also: $t = a \cdot e^{n-1}$ .... (1)

In Worten: Um die Grösse des $n$ten Gliedes einer geometrischen Progression zu finden, muss man den Exponenten auf die $(n-1)$te Potenz erheben und damit das erste Glied multipliciren.

Anmerkung. Ist n sehr gross, so wird die Berechnung von t durch Logarithmen ungemein erleichtert. Ueberhaupt kommen die Logarithmen bei Aufgaben über geometrische Progressionen sehr zu Statten, was jedoch erst im 21. Buche gezeigt werden kann, und bis dahin werden wir nur solche Erläuterungs-Beispiele wählen, welche sich ohne Logarithmen berechnen lassen.

Beispiel. Das erste Glied einer geometrischen Progression ist $\frac{1}{64}$, der Exponent 2, wie gross ist das neunte Glied?

Auflösung. Gegeben $a = \frac{1}{64}$, $e = 2$, $n = 9$ und t gesucht.

$$t = a \cdot e^{n-1}$$
$$t = \tfrac{1}{64} \cdot 2^{9-1} = 4.$$

254.

Aufgabe. Eine Summationsformel zu finden, nach welcher man aus dem ersten Gliede a, dem Exponenten e und dem letzten Gliede t die Summe der ganzen Progression berechnen kann.

Auflösung. Die Auflösung beruht auf einem kleinen Kunstgriff. Man bezeichne die Summe der geometrischen Progression: $a + ae + ae^2 \cdots + t$ mit s, nämlich:

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + \frac{t}{e^2} + \frac{t}{e} + t \ldots\ldots\ldots (1)$$

multiplicire diese Gleichung (1) (in welcher das vorletzte Glied offenbar $\frac{t}{e}$ das vorvorletzte $\frac{t}{e^2}$ ist) auf beiden Seiten mit dem Exponenten e, so kommt:

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots + \frac{t}{e} + t + te \ldots\ldots (2)$$

subtrahirt man nun die 1ste Gleichung von der 2ten, so erhält man:

$$es - s = te - a$$
$$(e-1)s = te - a$$
$$s = \frac{te - a}{e - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

In Worten: Um die Summe einer geometrischen Progression zu finden, muss man das letzte Glied mit dem Exponenten multipliciren, hievon das erste Glied subtrahiren und dann durch den um 1 verminderten Exponenten dividiren.

Der für s erhaltene Ausdruck findet häufig Anwendung und ist daher wohl zu merken.

Beispiele. Wie gross ist die Summe der folgenden geometrischen Progression: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}$. (§ 329.)

Auflösung. Gegeben: $a = 1$, $e = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{1024}$, s gesucht:

$$s = \frac{te - a}{e - 1}$$

$$s = \frac{\frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{2047}{2048}}{-\frac{1}{2}}$$

$$s = 1\tfrac{1023}{1024}.$$

255.

Aus den beiden Grundformeln für die geometrische Progression:

$$\left.\begin{array}{l} t = a \cdot e^{n-1} \ldots\ldots\ldots (I) \\ s = \dfrac{te - a}{e - 1} \ldots\ldots\ldots (II) \end{array}\right\}$$

müssen nun, wenn irgend drei der Grössen a, e, n, t, s gegeben sind, die Formeln für die beiden übrigen auf ähnliche Weise, wie im § 245 gezeigt, abgeleitet werden. Einige auf geometrische Reihen führende Aufgaben lassen sich vermittelst Logarithmen lösen, andere führen auf höhere verwickelte Gleichungen, deren Auflösung die höhere Analysis lehrt.

256.

Auch Buchstaben-Ausdrücke, welche geometrische Progressionen bilden, können nach Formel II. sehr kurz in eine Summe zusammengezogen werden. So sieht man z. B. gleich, dass die vieltheilige Grösse:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 + bz^4 + \cdots bz^{n-1}$$

eine geometrische Progression bildet, wo b das erste, bz^{n-1} das letzte Glied und z der Exponent ist. Substituirt man also diese Grössen statt a, t und e in die Formel $s = \frac{te - a}{e - 1}$, so ist:

$$b + bz + bz^2 + bz^3 \cdots + bz^{n-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

$$1 + e + e^2 + e^3 + e^4 \cdots + e^{n-1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots + x^{2n} = \frac{-x^{2n+1} - 1}{-x - 1} = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x}$$

$$y + x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} + \frac{x^4}{y^3} + \cdots + \frac{x^n}{y^{n-1}} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{(x - y)\, y^{n-1}}$$

Neunzehntes Buch.

Von den Logarithmen.

257.

Erst als man an Logarithmen dachte und vollständige Tafeln für sie berechnete, wurde die practische Arithmetik zur Vollkommenheit gebracht. Rechnungen, die noch zu Kepler's Zeiten ganze Tage und Wochen erforderten, oder die man gar, wegen unübersteiglicher practischer Schwierigkeiten, zum grossen Nachtheil der Wissenschaft und des bürgerlichen Wohls ganz aufgeben musste, können jetzt mit Hülfe der Logarithmen in ein paar Minuten, selbst von einem Anfänger der Mathematik gemacht werden. Und nicht ganz unpassend sagt daher ein Engländer: die Logarithmen sind in der Arithmetik das, was die Dampfmaschine in der Mechanik ist.

Um nur zuvor einen ungefähren Begriff von dieser äusserst wichtigen und schönen Erfindung zu geben und deren practischen Nutzen fühlbar zu machen, wollen wir einmal von einer ganz beliebigen Zahl, z. B. von 2, mehrere von 0 an auf einander folgende Potenzen entwickeln: $1=2^0$; $2=2^1$; $4=2^2$; $8=2^3$; $16=2^4$ &c. und dann, der bessern Uebersicht wegen, diese Potenzen sammt den dazu gehörigen Exponenten, durch einen Strich getrennt, so neben einander stellen, dass die Potenzen voran und die zugehörigen Exponenten gleich daneben stehen. Die Grundzahl 2 und das Gleichheitszeichen lassen wir der Einfachheit wegen aus, und schreiben also statt $1=2^0$, $128=2^7$ &c., kürzer: 1|0; 128|7 &c.

Potenzensystem.

Potenzen	Exponenten	Potenzen	Exponenten	Potenzen	Exponenten
1	0	512	9	262144	18
2	1	1024	10	524288	19
4	2	2048	11	1048576	20
8	3	4096	12	2097152	21
16	4	8192	13	4194304	22
32	5	16384	14	8388608	23
64	6	32768	15	16777216	24
128	7	65536	16	:	:
256	8	131072	17	:	:

258.

Erinnert man sich nun der vier allgemeinen Regeln der Potenzenrechnung, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \ \ldots\ldots (1) \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ (a^n)^m &= a^{mn} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \sqrt[n]{(a^m)} &= a^{\frac{m}{n}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{aligned}\right\} \text{(§ 204 bis 208)}$$

so führen diese unmittelbar auf den Nutzen eines solchen Potenzensystems. Die Addition und Subtraction ausgenommen, können nämlich alle übrigen Operationen an den in der ersten Spalte stehenden Zahlen in die nächst verwandten kürzern Operationen, an den daneben stehenden Exponenten verwandelt werden, nämlich die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, die Potentiirung in eine Multiplication und endlich die Wurzelausziehung in eine einfache Division. Diese bedeutenden Vortheile können wir schon durch vorstehendes, obgleich noch höchst unvollkommenes, Potenzensystem erläutern. Beispiele:

1) Sind zwei oder mehrere Zahlen, z. B 128 und 512, mit einander zu multipliciren, so suche man diese Factoren in der ersten Spalte, unter der Ueberschrift Potenzen, auf und addire nur die daneben stehenden Exponenten; alsdann ist die zur Summe der Exponenten gehörige Zahl das gesuchte Product. Man hat nämlich aus der Tafel:

Expon. von 128 = 7
Expon. von 512 = 9
Potenz zum Expon. 16 = 65536

Der Grund hievon ist leicht einzusehen. Alle Zahlen, welche in der ersten Spalte stehen, sind Potenzen von einerlei Wurzel. Es ist nämlich in unserm Beispiele:

$$128 = 2^7$$
$$512 = 2^9$$

Mithin: $128 \cdot 512 = 2^7 \cdot 2^9 = 2^{16}$ (§ 204) folglich muss auch die neben dem Exponenten $16 = (2)^{16}$ stehende Zahl $65536 = 128 \cdot 512$ sein.

2) Sind zwei in der ersten Spalte stehende Zahlen durch einander zu dividiren, so subtrahire man nur den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus, suche den Rest unter der Ueberschrift Exponenten auf, so ist die dazu gehörige Zahl der gesuchte Quotient. So findet man z. B.:

$$\frac{2097152}{256} = 8192$$

Es ist nämlich: Expon. von 2097152 = 21
„ „ 256 = 8
Potenz zum Expon. 13 = 8192

$$\text{denn: } \frac{2097152}{256} = \frac{2^{21}}{2^{8}} = 2^{21-8} = 2^{13}. \qquad (\S\ 205.)$$

3) Um eine in der ersten Spalte stehende Zahl auf eine Potenz zu erheben, braucht man nur den daneben stehenden Exponenten mit dem neuen zu multipliciren, so findet man neben dem Producte in der zweiten Spalte die gesuchte Potenz in der ersten. So ist z. B. $16^5 = 1048576$. Man hat nämlich:

Expon. 16 = 4
5
Potenz zum Expon. 20 = 1048576

denn: $16 = 2^4$; mithin: $16^5 = (2^4)^5 = 2^{20}$. (§ 207.)

4) Soll aus einer in der ersten Spalte stehenden Zahl eine Wurzel gezogen werden, so braucht man nur den zugehörigen Exponenten durch den Wurzelexponenten zu dividiren und die neben dem Quotienten gefundene Zahl als die verlangte Wurzel herauszuschreiben. So findet man z. B.:

$$\sqrt[7]{2097152} = 8$$

Expon. von 2097152 = 21
7
Potenz zum Expon. 3, = 8,
denn: $2097152 = 2^{21}$,

$$\text{folglich: } \sqrt[7]{2097152} = \sqrt[7]{2^{21}} = 2^{3} \qquad (\S\ 208.)$$

259.

So practisch brauchbar aber ein Potenzsystem, wie das vorstehende, in einigen Fällen schon sein möchte, so würde es doch wegen der grossen Lücken, in seiner jetzigen Unvollkommenheit von höchst beschränktem Gebrauche bleiben. Wollte man z. B. mit den zwischen 2 und 4, 4 und 8, 8 und 16 &c. fallenden Zahlen rechnen, so würde das Potenzsystem die erwähnten Rechnungsvortheile nicht gewähren können, weil diese Zahlen und deren Exponenten nicht darin enthalten sind.

Würden aber diese Zahlen noch eingeschaltet und die dazu gehörigen Exponenten berechnet und eingetragen, so würde auch

das System gleich eine allgemeine practische Brauchbarkeit haben und man hätte dann ein sogenanntes *Logarithmen-System*. In der Kunstsprache wird nämlich ein solches vollständiges Potenzen-System *Logarithmen-System* genannt, die Zahlen in der ersten Spalte heissen schlechthin Zahlen (*Numerus*) und ihre Begleiter, die Exponenten, heissen hier Logarithmen. Wir haben also für eine und dieselbe Sache zweierlei Benennungen, denn im Wesentlichen sind die Kunstwörter: Grundzahl, *basis*; Potenzen, *Numerus*; Exponenten, *Logarithmen* gleichbedeutend.

Das Bedürfniss, ein solches Logarithmen-System zu haben, ist schon früh gefühlt und geäussert worden. Allein Keiner wollte sich der Berechnung der den eingeschalteten Zahlen zugehörigen Logarithmen unterziehen, indem, wie § 262 zeigen wird, dieses, nach der Elementar-Arithmetik eine unsäglich mühsame, die Kräfte eines Privatmannes weit übersteigende Arbeit ist. Wir können uns daher Glück wünschen, dass diese wahre Riesenarbeit unserer nicht mehr harrt, indem wir jetzt mit Logarithmen-Systemen reichlich versorgt sind. In Deutschland werden die Vega'schen Logarithmen-Tafeln am meisten gebraucht, welche sowohl ihrer Correctheit, als auch beispiellosen Wohlfeilheit wegen, mit Recht zu empfehlen sind. Ein Exemplar kostet etwa 1 Thlr. Vor 300 Jahren würde man es noch gerne mit Tausenden bezahlt haben.

Die ersten Erfinder (?) der Logarithmen waren (zu Kepler's Zeiten) Byrg, ein Deutscher, und Napier, ein Schottländer. Der erste aber, der die Anfertigung vollständiger Logarithmen-Tafeln ernstlich unternahm und mit 8 Gehülfen ein ganzes Jahr darauf verwandte, war Henry Briggs, ein Schottländer.

260.

Es ist offenbar ganz willkürlich, auf welcher Basis ein Logarithmensystem errichtet wird. Ist das System einmal fertig, so braucht man die Basis gar nicht weiter zu kennen. In der kleinen Tafel § 257 wurde die Zahl 2 als Basis angenommen. Man hätte aber statt dessen auch jede andere Zahl nehmen können, und das darnach entstandene System würde ganz dieselben Dienste geleistet haben. Aus diesem Grunde, weil nämlich die Wahl der Basis willkürlich ist, hat Briggs, eines raumersparenden Vortheils wegen, die Grundzahl unsers Zahlensystems auch als Grundzahl seines Logarithmensystems angenommen.

Dieses System wird allgemein gebraucht, weshalb man es auch das allgemeine, oder nach seinem Begründer, das Briggs'sche, oder auch wohl, jedoch unpassend, das künstliche System nennt. Es giebt nämlich noch ein anderes, sogenanntes natürliches System, welches aber für die Praxis nicht so bequem ist, dennoch aber, aus einem gewissen in der Analysis näher anzugebenden Grunde, gleichfalls berechnet werden musste.

In der Voraussetzung, dass der Anfänger ein Briggs'sches System, z. B. das Vega'sche, zur Hand habe, wollen wir nun dasselbe näher erklären. Denn wenn auch den meisten Logarithmen-Tafeln eine vollkommene Theorie und Gebrauchs-Anweisung vorge-

druckt ist, so giebt es doch einige Puncte, welche dem Anfänger theils nicht deutlich genug sind, theils nicht genug beachtet werden. Wer aber Logarithmentafeln mit dem grösstmöglichsten Nutzen und Sicherheit gebrauchen will, der muss sich die etwas künstliche Einrichtung derselben, wo ein enger Raum so viel umfasst, wohl merken, und ein- für allemal gesagt, sich eine tüchtige Fertigkeit im Gebrauch derselben erwerben.

261.

Die gebräuchlichsten Logarithmentafeln enthalten die Logarithmen aller 1- bis 7ziffrigen Zahlen und zwar bis auf 7 Decimalen berechnet, welches für gewöhnliche Praxis vollkommen genügt. Der Anfang sieht so aus:

Numerus	Logarithmen	Numerus	Logarithmen
1	0,0000000	10	1,0000000
		:	
2	0,3010300	99	1,9956352
3	0,4771213	100	2,0000000
		:	
4	0,6020600	999	2,9995655
5	0,6989700	1000	3,0000000
		:	
6	0,7781513	9999	3,9999566
:	:	:	:
:	:	:	:

Welches also, nach § 257, andeutet, dass $1 = 10^0$;

$$2 = 10^{0{,}30103} = 10^{\frac{30103}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{30103}};$$

$$3 = 10^{0{,}4771213} \text{ \&c.}; \quad 10 = 10^1; \quad 100 = 10^2$$

Die Briggs'schen Logarithmen sind nämlich nichts weiter, als die Exponenten derjenigen Potenzen, auf welche die Grundzahl 10 erhoben werden muss, um die neben den Logarithmen stehenden Zahlen hervorzubringen. Das Gleichheitszeichen und die Basis 10 unter jedem Logarithmus muss man sich hinzudenken. Hiernach ist also 0 der Logarithmus von 1 (denn keine andere, als die 0te Potenz von der Grundzahl, kann die Einheit geben); von 2 ist 0,3010300, von 10 ist 1 der Logarithmus (denn keine andere, als die 1ste Potenz von der Grundzahl, kann die Grundzahl wiedergeben). Man hat demnach in Zeichen: log. von 1 = 0, oder kurz:

log. 1 = 0,0000000; log. 10 = 1,0000000;

„ 2 = 0,3010300; „ 99 = 1,9956352

&c.

262.

Die höhere Mathematik bietet Mittel dar, nach welchen ein geübter Rechner die Logarithmen fast eben so schnell berechnet, als ein anderer sie niederschreiben kann. Da wir aber diese Vorkenntnisse nicht voraussetzen dürfen, so müssen wir uns begnügen, hier nur das mühsame Elementar-Verfahren geschichtlich zu erwähnen, nach welchem Briggs, zu dessen Zeiten die neuere Mathematik noch nicht erfunden war, die Logarithmen berechnet haben soll.

Um z. B. den Logarithmus von 5 zu finden, verfuhr man folgendermaassen:

Da 5, als Potenz von 10 betrachtet, zwischen 10^0 und 10^1 fällt, indem $10^0 < 5$ und $10^1 > 5$ ist, so versuche man, ob vielleicht 10 auf die $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$te Potenz erhoben, die Zahl 5 giebt. Man hat nun $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}1622776601 \cdots\cdots$ Folglich ist $10^{\frac{1}{2}} < 5$; der log. 5 liegt daher zwischen den schon engern Gränzen $\frac{1}{2}$ und 1, indem $10^{\frac{1}{2}} < 5$ und $10^1 > 5$. Auf diese Weise kann man die Gränzen immer enger zusammenziehen, indem man nach und nach die halbe Summe des kleinern und grössern Exponenten, zwischen welche der gesuchte fällt, auf die Probe nimmt und mithin nie eine höhere Wurzel als die zweite zu ziehen nöthig hat. Erhebt man 10 auf die $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$ Potenz, so kommt (§ 210):

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{10^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{10^1 \cdot 10^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{10 \cdot (3{,}1622 \cdot\cdot)} = 5{,}6234132 \cdot\cdot$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{l} 10^{\frac{1}{2}} < 5 \\ 10^{\frac{3}{4}} > 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{also } 10^{\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}} = 10^{\frac{5}{8}} = \sqrt{10^{\frac{5}{4}}} = \sqrt{10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}} \\ = \sqrt{(5{,}623 \cdot\cdot)(3{,}1622 \cdot\cdot)} = 4{,}216965034 \cdot \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^{\frac{5}{8}} < 5 \\ 10^{\frac{3}{4}} > 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10^{\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}{2}} = 10^{\frac{11}{16}} = \sqrt{10^{\frac{5}{8}} \cdot 10^{\frac{3}{4}}} \\ = \sqrt{(4{,}2169 \cdot\cdot)(5{,}623 \cdot\cdot)} = 4{,}869675252 \cdot\cdot \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^{\frac{11}{16}} < 5 \\ 10^{\frac{3}{4}} > 5 \end{array}\right\} 10^{\frac{\frac{11}{16}+\frac{3}{4}}{2}} = \sqrt{10^{\frac{11}{16}} \cdot 10^{\frac{3}{4}}} = 5{,}232991 \cdot\cdot$$

&c.

Nachdem man dies Verfahren etwa 22mal wiederholt hatte, fand man endlich:

$$10^{\frac{2931693}{4194304}} = 5 \quad (\text{genauer: } = 5{,}00000086 \cdot\cdot)$$

Mithin ist näherungsweise: log. 5 $= \frac{2931693}{4194304}$, oder wenn man, der Einfachheit wegen, und weil dann bequemer damit zu rechnen

ist, den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, bis auf 7 Decimalen genau:

$$\log. 5 = 0,6989700\ldots\ldots$$

Theoretisch genau lassen sich die Logarithmen nicht berechnen, weil sie sogenannte transcendente Grössen sind, deren Decimalen, gleich denen einer irrationalen Wurzel, bis in's Unendliche fortlaufen.

Ursprünglich sind die Logarithmen auf mehr Decimalen berechnet worden. Diese werden aber, ihrer Unbequemlichkeit wegen, höchst selten und nur bei den allerfeinsten Rechnungen gebraucht. Die Logarithmen mit 7 Decimalen sind für die alltägliche Praxis mehr als hinreichend. Wer sehr viele numerische Rechnungen zu machen hat, kann sich neben den siebenziffrigen Logarithmen auch noch der kleinern fünfziffrigen Logarithmen bedienen. Diese sind noch ungemein bequemer und wenn auch nicht in allen, doch in vielen Fällen ausreichend.

263.

Hätten alle Logarithmen nach dem eben erwähnten mühsamen Verfahren berechnet werden müssen, so würde die Arbeit sicher unterblieben sein, und auf die Hülfe der neueren Analysis gewartet haben. Dies war aber nicht nöthig. Man brauchte auf diese Weise höchstens nur die Logarithmen der ersten Primzahlen zu berechnen, woraus dann die übrigen durch eine leichte Addition und Multiplication gefunden werden. Denn alle Zahlen lassen sich in Primzahlen, als deren Factoren, auflösen. Kennt man aber die Logarithmen mehrerer Factoren, so hat man auch, durch unmittelbare Addition derselben, den Logarithmus ihres Products. Addirt man z. B. die Logarithmen von 2 und 3, so hat man den log. von 6. Der Grund ist leicht einzusehen, denn setzt man der Kürze wegen $\log. 2 = a$, $\log. 3 = b$, so ist $2 = 10^a$ und $3 = 10^b$, mithin: $2 \cdot 3 = 10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$.

Anmerkung. Macht man jedoch die Vergleichung mit den Tafeln, indem man z. B. log. 2 und log. 3 wirklich addirt, um zu sehen, ob die Summe mit log. 6 übereinstimmt, so muss man hiebei, wie überhaupt bei allen logarithmischen Rechnungen, folgende Bemerkungen wohl beachten: Bei der Berechnung der Logarithmen-Tafeln wurden mehr als 7 Decimalen gebraucht. Von diesen Decimalen sind die 7 ersten dergestalt eingetragen, dass die 7te Decimale um 1 vergrössert wurde, wenn die darauf folgende 8te Decimale über 5 war. Aus dieser Ursache kann also die Richtigkeit der letzten Decimale nicht verbürgt werden. Diese Abweichung von der Richtigkeit kann daher, wenn auch für gewöhnliche Praxis immer unschädlich, dennoch während der Rechnung beträchtlicher werden und auch noch auf die vorletzte Ziffer Einfluss haben. Addirt man nämlich viele Logarithmen oder multiplicirt sie mit einer grossen Zahl, so muss das Resultat, wenn die letzte Decimale zu gross war, auch zu gross werden, und wenn die letzte Decimale nicht zu gross war, wegen Vernachlässigung des Beitrags, den die 8te und 9te Decimale gegeben hätten, zu klein werden. In solchen Fällen können also die beiden letzten Decimalen der Logarithmen von der Wahrheit abweichen. Dividirt man aber diese Logarithmen wieder, so verhält sich die Sache umgekehrt, indem der etwaige Fehler der letzten Ziffer mit dividirt, und folglich wieder kleiner wird.

264.

Weil die 1ste Potenz von 10 die kleinste zweiziffrige, die 2te Potenz die kleinste dreiziffrige, die 3te Potenz die kleinste vier-

ziffrige Zahl giebt &c., so müssen im Briggs'schen System (als nothwendige Folge der Grundzahl 10) die Logarithmen aller zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen grösser als 0 und kleiner als 1, mithin ächte Brüche, die Logarithmen aller zwischen 10 und 100 fallenden Zahlen aber >1 und <2, mithin gemischte Zahlen sein. Die ganze Zahl, welche ein Logarithmus enthält, heisst die Kennziffer, und der angehängte Decimalbruch die Decimalen desselben. Es ist ferner klar, dass im Briggs'schen Systeme die Logarithmen aller Zahlen, welche keine ganze Potenzen von 10 sind, gemischte Zahlen sind, und dass die Kennziffer eines Logarithmus immer eine Einheit weniger zählen muss, als die zugehörige Zahl Ziffern hat.

Für alle einziffrigen Zahlen ist 0 die Kennziffer der zugehörigen Logarithmen, für alle zweiziffrigen Zahlen 1, für dreiziffrige 2 &c.

Da man also aus der Anzahl Ziffern einer Zahl zugleich auch die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus weiss, so konnten deshalb auch, zur Ersparung des Raums, die Kennziffern der Logarithmen aus den Tafeln wegbleiben, und dies ist der erwähnte Vortheil, weshalb Briggs die Zahl 10 als Grundzahl angenommen hat. Für alle Zahlen von 1000 an, findet man daher bloss die Decimalen der zugehörigen Logarithmen; die Kennziffer muss der Rechner selber hinzufügen. Hiernach hat man aus den Tafeln mit Zusetzung der Kennziffern:

$$\log.\ 4571 = 3{,}6600112;$$
$$\log.\ 4577 = 3{,}6605809$$
&c.

265.

Da die Logarithmen mehrerer Factoren zusammen addirt, den Logarithmus ihres Products geben, und ferner die Logarithmen aller einfachen Rangzahlen ganze Zahlen, also blosse Kennziffern sind, welche keine Decimalen bei sich haben, nämlich: $\log.\ 10 = 1$; $\log.\ 100 = 2$; $\log.\ 1000 = 3$ &c., so ist klar, dass wenn man eine Zahl mit 10, 100, 1000 &c. multiplicirt, die Decimalen ihres Logarithmus deshalb noch immer dieselben bleiben und bloss die Kennziffer sich ändert. Kennt man z. E. den Logarithmus von 2, so kennt man auch die Logarithmen von $20 = 2 \cdot 10$, von $200 = 2 \cdot 100$ &c. Aus dem Logarithmus von 47 hat man gleich mit gehöriger Veränderung der Kennziffer auch die Logarithmen von 470, 4700, 47000 &c. Man hat z. B. aus den Tafeln: *)

---

*) Ausser den nur störenden Kennziffern hätten also auch alle 1-, 2- und 3ziffrigen Zahlen und deren Logarithmen aus den Tafeln wegbleiben können, da man beim Rückwärtsaufschlagen der Zahlen zu gegebenen Logarithmen diese ersten Seiten doch nicht gebrauchen kann. Die Tafeln brauchten erst mit den

log.	2 = 0,3010300;	log.	47 = 1,6720979
„	20 = 1,3010300;	„	470 = 2,6720979
„	200 = 2,3010300;	„	4700 = 3,6720979
„	2000 = 3,3010300;	„	47000 = 4,6720979
„	200000 = 5,3010300;	„	47000000 = 7,6720979

&c.

266.

Da nun umgekehrt der Logarithmus eines Quotienten (also auch von einem Bruche, den man als eine angedeutete Division betrachten kann) erhalten wird, wenn man den Logarithmus des Divisors von dem des Dividendus subtrahirt, so folgt hieraus sowohl, als aus § 265, dass, wenn man eine Zahl durch 10, 100, 1000 &c. dividirt, die Kennziffer des Logarithmus jener Zahl um so viele Einheiten kleiner wird, als die einfache Rangzahl Nullen hat, die Decimalen aber unverändert bleiben. So ist z. B.:

log. 4571 = 3,6600112 und folglich

log. $\frac{4571}{10}$ = 2,6600112

log. $\frac{4571}{100}$ = 1,6600112

denn es ist z. B. $\frac{4571}{100} = \frac{10^{3,6600112}}{10^2} = 10^{1,6600112}$.

267.

Aus vorstehendem § ergiebt sich nun von selber die Regel, wie man zu einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch den zugehörigen Logarithmus findet: Man setze nämlich die, zu der ganzen Zahl gehörige, Kennziffer und schlage dann den Logarithmus auf, als wenn das, die ganze Zahl und Bruch trennende, Decimalzeichen gar nicht da stände. So ist z. B. $\frac{4571}{10}$ = 457,1; $\frac{4571}{100}$ = 45,71 &c., daher:

log. 457,1 = 2,6600112

log. 45,71 = 1,6600112

log. 4,571 = 0,6600112

4ziffrigen Zahlen anzufangen, denn will man z. E. den Logarithmus von 2, 20 oder 200 haben, so findet man diesen mit Vorsetzung der gehörigen Kennziffer neben 2000. Ebenso findet man die Logarithmen von 17, 170, neben 1700, von 83, 830, neben 8300 &c.

Die ersten Seiten der Logarithmentafeln gewähren aber in den Fällen eine Bequemlichkeit, wenn man zu gleicher Zeit die Logarithmen mehrerer 1- bis 3ziffrigen Zahlen aufschlagen muss, indem man diese dann ohne vieles Blättern nahe bei einander findet.

268.

Um den zu einer ganzen Zahl mit angehängtem gewöhnlichen Bruche, z. B. den zu $36\frac{3}{4}$ gehörenden Logarithmus zu finden, kann man auf zweierlei Weise verfahren. Entweder man verwandele den gewöhnlichen Bruch erst in einen Decimalbruch und suche dann den Logarithmus nach der vorigen Regel, oder man richte die gemischte Zahl ein, und subtrahire dann den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers. Da z. B. $36\frac{3}{4} = 36,75$ oder auch $36\frac{3}{4} = \frac{147}{4}$, so ist auch:

$$\log.\ 36\tfrac{3}{4} = \log.\ 36,75 = \log.\ \tfrac{147}{4}$$

$$\log.\ 36,75 = 1,5652573;\quad \log.\ 147 = 2,1673173$$
$$\cdots\cdots 4 = 0,6020600$$
$$\log.\ \tfrac{147}{4} = 1,5652573$$

269.

Um die zu ächten Brüchen gehörigen Logarithmen und deren Kennziffer aus den Tafeln entnehmen zu können, überlege man erst Folgendes: die kleinste directe Potenz von 10 ist die 0te, und diese giebt die Einheit, $1 = 10^0$. Folglich kann keine directe Potenz von 10 einen ächten Bruch hervorbringen, dies kann nur eine umgekehrte, d. h. eine Potenz mit negativem Exponenten (§ 205) und folglich müssen die Logarithmen aller ächten Brüche nothwendig negativ sein, und zwar je kleiner der ächte Bruch, je grösser der dazu gehörige negative Logarithmus. *)

Den zu einem ächten Decimalbruch (d. i. ein solcher, der keine Ganze bei sich hat) gehörenden negativen Logarithmus würde man nach § 266 erhalten, indem man den Decimalbruch mit untergelegtem Nenner schriebe und dann den Logarithmus des Zählers von dem des Nenners subtrahirte. Es wäre z. B.:

$$\text{weil } 0,0564 = \tfrac{564}{10000}$$
$$\text{und } \log.\ 564 = 2,7512791$$
$$\log.\ 10000 = 4,0000000$$
$$\log.\ 0,0564 = -1,2487209$$

$$\text{denn: } \tfrac{564}{10000} = \frac{10^{2,7512791}}{10^4} = 10^{2,7512791-4} = 10^{-1,2487209}.$$

*) Wäre ein Bruch über alle Vorstellung klein, oder wie man wohl zu sagen pflegt, unendlich klein, so müsste sein negativer Logarithmus unendlich gross sein. Eine Grösse, die unendlich gross und nicht mehr durch Zahlen auszudrücken ist, pflegt man durch das Zeichen ∞ und eine unendlich kleine Grösse, deren Unterschied von 0 nicht mehr anzugeben ist, durch das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ anzudeuten. Dieser Vorstellung zufolge wäre also $10^{-\infty} = \frac{1}{10^{\infty}} = 0 = \frac{1}{\infty}$. Daher: log. $0 = -\infty$ (inf. neg.). Diese letztere Bezeichnung pflegt unnöthiger

270.

Wird aber ein negativer Logarithmus nicht als das Endresultat einer Rechnung betrachtet, soll er vielmehr zu andern Logarithmen addirt, davon subtrahirt oder die ihm zugehörige Zahl aufgeschlagen werden, so ist mit einem negativen Logarithmus viel bequemer zu rechnen, wenn man ihn erst in eine solche zweitheilige Grösse verwandelt, wovon der eine Theil ein positiver ächter Decimalbruch, und der andere negative Theil eine ganze Zahl ist, die ersterem positiven Theil als negative Kennziffer mit dem Minus-Zeichen angehängt wird. Auf diese Form ist ein negativer Logarithmus leicht zu bringen, indem man ihm nur eine solche Zahl mit dem + und —Zeichen hinzufügt, dass der negative Logarithmus mit dem ihm hinzugefügten positiven Theil vereint, einen ächten positiven Decimalbruch giebt. So wird z. B. aus

$$\log. 0{,}0564 = -1{,}2487209$$

indem wir 2 addiren und subtrahiren, wodurch die Grösse des Logarithmus nicht geändert wird:

$$\log. 0{,}0564 = 2 - 1{,}2487209 - 2$$

zieht man nun die beiden ersten Theile der dreitheiligen Grösse in Eins zusammen, so erhält der negative Logarithmus die bequemere Form, wo er 0 zur positiven Kennziffer und positiven Decimalen, und angehängt, eine ganze Zahl als negative Kennziffer hat, nämlich:

$$\log. 0{,}0564 = 0{,}7512791 - 2$$

271.

Weil der Nenner eines ächten Decimalbruchs die Einheit mit grade so viel angehängten Nullen ist, als der Bruch Decimalstellen enthält: $0{,}564 = \frac{564}{1000}$; $0{,}0564 = \frac{564}{10000}$ &c., so ist leicht einzusehen, dass die Kennziffer vom Logarithmus des Nenners um ein, zwei, drei ··· Einheiten grösser ist, als die Kennziffer vom Logarithmus des Zählers, je nachdem dessen erste bedeutliche Ziffer Zehntel, Hundertel, Tausendtel ··· angiebt, oder was dasselbe ist, ein, zwei, drei ··· Nullen vor sich hat.

Hieraus ergiebt sich nun eine leichte Regel, nach welcher man den negativen Logarithmus eines ächten Decimalbruchs gleich in der bequemeren Form aus den Tafeln erhalten kann. Man suche nämlich den Logarithmus zu einem ächten Decimalbruch grade so, als wenn das Decimalzeichen gar nicht da stände, setze aber im

---

Weise zu Anfang der Logarithmentafeln zu stehen, und soll weiter nichts bedeuten, als dass es von 0 keinen wirklichen Logarithmus giebt, eben so wenig, als eine wirkliche Grösse 0 sein kann.

Logarithmus 0 als positive und zugleich eine negative Kennziffer von so vielen Einheiten, als der ersten geltenden Ziffer des Decimalbruchs Nullen voranstehen (die vor dem Decimalzeichen stehende Null mitgerechnet). Man hat z. B.:

$$\begin{aligned} \log.\ 0{,}564 &= 0{,}7512791 - 1 \\ \cdot\cdot\ 0{,}0564 &= 0{,}7512791 - 2 \\ \cdot\cdot\cdot\ 0{,}00564 &= 0{,}7512791 - 3 \end{aligned}$$

Der Logarithmus vom Zähler 564 hat nämlich 2 zur Kennziffer, der zu subtrahirende Logarithmus vom Nenner des ersten Bruchs hat 3 zur Kennziffer. Zwei Einheiten werden hievon getilgt und dass noch eine Einheit zu subtrahiren bleibt, ist (der bequemen Form wegen) angedeutet.

272.

Um den negativen Logarithmus eines gewöhnlichen ächten Bruches zu finden, kann man den gewöhnlichen Bruch erst in einen Decimalbruch verwandeln und dann nach vorhergehender Regel verfahren. So findet man z. B. $\frac{7}{16} = 0{,}4375$, daher:

$$\log.\ \tfrac{7}{16} = \log.\ 0{,}4375 = 0{,}6409781 - 1$$

Oftmals ist es aber bequemer, den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers, wie folgendes Beispiel zeigt, zu subtrahiren:

$$\begin{aligned} &\quad\ {+1} \qquad\qquad -1 \\ \log.\ 7 &= 0{,}8450980 \\ \cdot\cdot\cdot\ 16 &= 1{,}2041200 \\ \hline \log.\ \tfrac{7}{16} &= 0{,}6409780 - 1 \end{aligned} \qquad (\S\ 263,\ \text{Amkg.})$$

Es musste hier, um log. $\frac{7}{16}$ gleich in der bequemern Tafelform, nämlich mit 0 zur positiven Kennziffer und positiven Decimalen zu erhalten, zum Logarithmus des Zählers, um den des Nenners subtrahiren zu können, eine Einheit addirt und subtrahirt werden, was dessen Grösse nicht ändert.

Eben so findet man log. $\frac{3}{7}$ und log. $\frac{11}{4771}$; nämlich:

$$\begin{aligned} &\ {+1} \qquad\qquad -1 \\ \log.\ 3 &= 0{,}4771213 \\ \cdot\cdot\cdot\ 7 &= 0{,}8450980 \\ \hline \log.\ \tfrac{3}{7} &= 0{,}6320233 - 1; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\ {+3} \qquad\qquad -3 \\ \log.\ 11 &= 1{,}0413927 \\ \cdot\cdot\cdot\ 4771 &= 3{,}6786094 \\ \hline \log.\ \tfrac{11}{4771} &= 0{,}3627833 - 3. \end{aligned}$$

Anmerkung. Ohne den Werth eines Logarithmus zu ändern, kann man, wenn es die Umstände erfordern, die positive und negative Kennziffer gleichzeitig um eine beliebige Zahl grösser oder kleiner machen. So ist z. B.

$$\log.\ \tfrac{3}{7} = 0{,}6320233 - 1 = 5{,}6320233 - 6 = 3{,}6320233 - 4\ \&c.$$

273.

Nachdem nun zuvor gezeigt worden, was beim Aufschlagen der Logarithmen zu ganzen, gebrochenen und gemischten Zahlen

hinsichtlich der Kennziffer zu beachten ist, und dass die Logarithmen zu allen ein- bis vierziffrigen Zahlen unmittelbar in der mit 0 bezeichneten Spalte gefunden werden, wollen wir nun die weitere Einrichtung der 7ziffrigen Logarithmentafeln erläutern und zuerst zeigen, wie man mittelst der neun folgenden Spalten, welche 1, 2, 3 ··· 9 zur Ueberschrift und Unterschrift haben, die Logarithmen aller 5ziffrigen, und dann mittelst der beiden letzten Spalten *P*, *P*, (Proportionaltheile) auch die Logarithmen aller 6- und 7ziffrigen Zahlen findet.

1) Als man die Logarithmen berechnete, ergab sich, dass im Allgemeinen ihre drei ersten Decimalen aller fünfziffrigen, nur in der letzten Ziffer verschiedenen Zahlen, vollkommen gleich sind. Man fand z. B.:

log. 1267 = 3,102 7766
„ 12670 = 4,102 7766
„ 12671 = 4,102 8109
„ 12672 = 4,102 8452
„ 12673 = 4,102 8794
„ 12674 = 4,102 9137
„ 12675 = 4,102 9480
„ 12676 = 4,102 9822
„ 12677 = 4,103 *0165
„ 12678 = 4,103 *0507
„ 12679 = 4,103 *0850

Dieser Bemerkung zufolge wurde folgende bequeme und raumersparende Einrichtung der Tafeln getroffen: Da die Decimalen der Logarithmen von 1267 und 12670 vollkommen gleich sein müssen, (§ 265) so brauchen beide nur ein gemeinschaftliches Fach. Folgt aber auf die vierziffrige Zahl 1267 statt 0 eine andere fünfte Ziffer, so ändern sich deshalb bloss die vier letzten Decimalen des Logarithmus; und diese vier Decimalen brauchten daher nur in dieselbe Querzeile, auf welcher die vier ersten Ziffern der fünfziffrigen Zahl stehen, und zwar in die Spalte, welche die fünfte Ziffer zur Ueberschrift hat, besonders eingetragen zu werden. Auf die Fälle, wo sich ausser den vier letzten Decimalen auch noch die vorhergehende dritte geändert hat, ist durch ein Sternchen (* oder $\bar{0}$) aufmerksam gemacht.

Haben irgend vier Decimalstellen ein solches Merkzeichen bei sich, so haben es natürlich alle folgenden in derselben Reihe. Hieraus folgt also die Regel:

2) Um den zu einer fünfziffrigen Zahl gehörenden Logarithmus zu finden, setze man erst die gehörige Kennziffer, suche dann die 4 ersten Ziffern der vorgegebenen Zahl in der ersten Spalte (*N*) und nehme gleich daneben, in der mit 0 bezeichneten Spalte, die drei ersten Decimalen des Logarithmus, die vier folgenden Decimalen aber in derselben Querzeile aus derjenigen Spalte, welche die fünfte

Ziffer der gegebenen Zahl zur Ueberschrift hat. Sind diese vier letzten Decimalen mit einem Sternchen bezeichnet, so muss man die vorhergehende dritte um eine Einheit grösser nehmen. Wird die fünfziffrige Zahl einmal oder wiederholt mit 10 multiplicirt oder dividirt, so ändert sich bloss die Kennziffer. Beispiele:

log. 22035 = 4,3431131		log. 78,164 = 1,8930068	
· · · 2,2035 = 0,3431131		· · · 781640 = 5,8930068	
· · · 33829 = 4,5292892		· · · 0,049097 = 0,6910550 — 2	
· · · 338,87 = 2,5300331		· · · 1,1011 = 0,0418268	

274.

Wenn man die Logarithmen mehrerer auf einander folgenden 5ziffrigen Zahlen von einander subtrahirt, so findet man, dass die Differenzen nur in den drei letzten Decimalen Statt finden und für kleine Zwischenräume einander gleich sind; z. B.:

log. 23740 = 4,375	4807	Differenz
„ 23741 = 4,375	4990	183
„ 23742 = 4,375	5173	183
„ 23743 = 4,375	5356	183
„ 23744 = 4,375	5539	183
„ 23745 = 4,375	5722	183
⋮	⋮	

Man sieht also, dass für kleine Zwischenräume die Logarithmen der 5ziffrigen Zahlen der 5ten Ziffer proportional wachsen.

Wächst z. B. die Zahl 23740 um eine Einheit, so wachsen die 3 letzten Decimalen ihres Logarithmus um die einmalige Differenz 183; wächst die Zahl 23740 um 2, 3, 4 Einheiten, so muss man die Differenz 183, 2-, 3-, 4mal zu den letzten Decimalen ihres Logarithmus addiren &c.

Da nun diese verhältnissmässige Zunahme der letzten Decimalen des Logarithmus für Zwischenräume Statt findet, welche um mehrere ganze Einheiten von einander entfernt sind, so muss sie um so mehr auch da Statt finden, wo der Sprung nur durch Bruchtheile, wie $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ ·· $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$ &c. geht. Wächst z. B. die Zahl 23743 nur um den Bruch $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ · · · $\frac{1}{100}$ &c., so werden auch die letzten Decimalen ihres Logarithmus nur um $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ · · · $\frac{1}{100}$stel der Differenz, nämlich um $\frac{1}{10} \cdot 183$; $\frac{2}{10} \cdot 183$ &c. wachsen. Aus dem Logarithmus von 23743 und der Differenz vom nächstfolgenden kann man also auch die Logarithmen von $23743\frac{8}{10} = 23743{,}8$; 23743,85; 23743,859, mithin auch von den um 10-, 100-, 1000mal grössern Zahlen $237438 = 10 \cdot 23743\frac{8}{10}$; $2374385 = 100 \cdot 23743\frac{85}{100}$ finden, indem die Decimalen ihrer Logarithmen dieselben sind, und nur die Kennziffern sich ändern. Man hat z. B.:

log. 23743 = 4,3755356.

Addirt man nun zu den letzten Decimalen dieses Logarithmus den 10ten Theil der Differenz 183, 8mal, nämlich:

$$\tfrac{8}{10}\cdot 183 = 8\cdot(18,3) = 146,4 = 146$$

so kommt: log. 23743,8 = 4,3755502

mithin (§ 265): log. 237438 = 5,3755502

Addirt man den 100sten Theil der Differenz 183, 85mal, nämlich:

$$\tfrac{85}{100}\cdot 183 = 155,5$$

so kommt: log. 23743,85 = 4,3755511

also: log. 2374385 = 6,3755511

&c.

In den neuern 7ziffrigen Logarithmentafeln wird aber dieses Berechnen der Proportionaltheile durch die mit *PP* überschriebenen beiden Spalten sehr erleichtert, indem die 2te die besagte Differenz 183 und zugleich den Antheil für jede sechste, vorläufig als Zehntel betrachtete Ziffer im Voraus berechnet enthält, woraus sich der Zuwachs für die folgende 7te und 8te Ziffer, die man vorläufig als Hundertel und Tausendtel ansehen kann, leicht ableiten lässt.

Um nämlich den Logarithmus einer 6- bis 8ziffrigen Zahl aufzuschlagen, setze man erst die gehörige Kennziffer und suche den Logarithmus vorläufig nur zu den fünf ersten Ziffern der vorgegebenen Zahl; sehe zu, in welchem Fache die Differenz dieses Logarithmus vom nächst folgenden ausgesetzt ist (indem man in Gedanken bloss die letzte Decimale des erstern von der letzten des zweiten subtrahirt), suche in der ersten Spalte dieses Faches die sechste Ziffer der gegebenen Zahl und nehme den daneben stehenden Antheil von der Differenz; suche ferner die siebente und achte Ziffer wieder in der ersten Spalte und nehme für die siebente Ziffer den zehnten, für die achte aber den hundertsten Theil des daneben stehenden Proportionaltheils und addire Alles.

So findet man z. B:

$$\log.\ 23743\dot{8}\dot{5}\dot{9} = 7,3755513.$$

Es ist nämlich:

$$\tfrac{859}{1000}\cdot 183 = \left(\tfrac{8}{10} + \tfrac{5}{100} + \tfrac{9}{1000}\right)183 = \tfrac{8}{10}\cdot 183 + \tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{5}{10}\cdot 183 + \tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot 183.$$

In den Spalten *PP* findet man nun:

$$\tfrac{8}{10}\cdot 183 = 146$$

$$\tfrac{5}{10}\cdot 183 = 91,\ \text{also}\ \tfrac{1}{10}\cdot 91 = 9,1$$

$$\tfrac{9}{10}\cdot 183 = 164,\ \text{also}\ \tfrac{1}{100}\cdot 164, = 1,6$$

daher:

log. 23743859 = 7,3755356

Zuwachs wegen der sechsten Ziffer (8)······146

$\frac{1}{10}$ · „ „ „ „ „ (5)······ 9,2

$\frac{1}{100}$ · „ „ „ „ „ (9)······ 1,65

log. 23743859 = 7,3755513

Eben so: log. 237,43859 = 2,3755513

Eben so findet man: log. 1275,8073 = 3,1057851

nämlich: log. 1275,8073 = 3,1057826

Zuwachs wegen der sechsten Ziffer (0)········0

$\frac{1}{10}$ · „ „ „ siebenten „ (7)········23,8

$\frac{1}{100}$ · „ „ „ achten „ (3)········ 1,02

log. 1275,8073 = 3,1057851

275.

Um kurz anzudeuten, dass umgekehrt die, einem Logarithmus zugehörige Zahl (Numerus) aufgeschlagen werden soll, wollen wir vor den Logarithmus das Zeichen N setzen. Da z. B. log. 2 = 0,3010300, so wäre nach Festsetzung obiger Bezeichnung umgekehrt:

N 0,3010300 = 2.

Die Regeln, nach welchen man rückwärts wieder die zu gegebenen Logarithmen gehörigen Zahlen findet, ergeben sich aus dem Vorhergehenden. (S. Note § 265.)

1) Man suche allemal die drei ersten Decimalen des gegebenen Logarithmus in der mit 0 bezeichneten Spalte, die vier andern Decimalen des Logarithmus aber in einer der mit 0, 1, 2 · · · 9 bezeichneten Spalten; entweder in derselben Querzeile, in welcher die drei ersten stehen, oder tiefer, oder auch, aber dann nur eine Zeile, höher, in welchem Falle ein Sternchen dabei steht. Findet man nun die vier letzten Decimalen des Logarithmus in einer der zehn Spalten ganz genau enthalten, so schreibe man die in ihrer Querzeile in der Spalte N stehende vierziffrige Zahl heraus, füge derselben aber noch als fünfte Ziffer diejenige Zahl hinzu, in deren Spalte die vier letzten Decimalen des Logarithmus genau stehen. Von der herausgeschriebenen fünfziffrigen Zahl schneide man endlich noch (von vorne gezählt) als die Ganzen darstellend, eine Ziffer mehr ab, als die Kennziffer des Logarithmus Einheiten hat, hat aber der Logarithmus eine negative Kennziffer, so muss man der herausgeschriebenen fünfziffrigen Zahl just so viele Nullen vorsetzen, als

die negative Kennziffer Einheiten hat, und dann hinter die erste Null das Decimalzeichen setzen. Zur deutlichern Einsicht und Einübung dieser Regeln lassen wir hier erst einige Beispiele in abwechselnder Ordnung folgen. Man hat z. B.:

log. 22035	=4,3431131;	N 4,3431131 = 22035
log. 666,42	=2,8237480;	N 3,8237480 = 6664,2
log. 8,7707	=0,9430343;	N 6,9430343 = 8770700
log. 0,92904	=0,9680344 — 1;	N 0,9680344 — 3 = 0,0092904
log. 0,051001	=0,7075787 — 2;	N 0,0010411 = 1,0024

2) Um endlich zu einem gegebenen Logarithmus, der nicht genau in den Tafeln enthalten ist, die zugehörige Zahl aufzuschlagen, verfahre man nach folgender Regel: Man suche die drei ersten Decimalen des Logarithmus in der mit 0 bezeichneten Spalte, und zu den vier letzten Decimalen die vier nächst kleinern in einer der mit 0,1 ··· 9 bezeichneten Spalten und schreibe die hiezu gehörige fünfziffrige Zahl heraus. Subtrahire die gefundenen vier nächst kleinern Decimalen von den gegebenen vier letzten und suche den Rest in der zweiten Spalte des mit *PP* bezeichneten Faches; findet man hier den Rest genau, so ist die links dabei stehende Ziffer die sechste der gesuchten Zahl, findet man den Rest aber nicht genau, so setze man die neben dem nächst kleinern Proportionaltheil stehende Ziffer, als die sechste, subtrahire diesen nächst kleinern Rest von dem grössern, multiplicire diesen neuen Rest mit 10 und setze die neben dem, diesem Producte am nächsten kommenden Proportionaltheil stehende Ziffer als die siebente der gesuchten Zahl. Die achte Ziffer lässt sich durch siebenziffrige Logarithmentafeln nicht mehr bestimmen und muss deshalb, wenn die Kennziffer es erfordert, durch eine Null ergänzt werden.

So findet man z. E.:

N 7,3755512 = 23743850

denn der nächst kleinere log. ist = 7,3755356

und die dazu gehörige Zahl = 23743000

Rest 156

der nächst kleinere Proportionaltheil = 146, die 6te Ziffer hiezu = 8

Rest multiplicirt mit 10, = 100

nächster Proportionaltheil = 92; also die 7te Ziffer = 5

mithin: N 7,3755512 = 23743850

Eben so: N 4,3755512 = 23743,85

Diese Regel folgt unmittelbar aus der vorhergehenden. Man schliesse nämlich so: Wäre die Differenz statt 156, 153 gewesen, so würde die zu dem nächst kleinern Logarithmus herausgeschriebene Zahl um eine Einheit grösser geworden sein; mithin nach der Regel de tri: 153 geben 1, wie viel 156?

Antwort: $\frac{156}{153} = 0{,}55$.

276.

Die Logarithmen der auf einander folgenden 8ziffrigen Zahlen weichen erst in der 8ten, 9ten und ferneren, ausserhalb der 7ziffrigen Tafeln liegenden Decimale von einander ab. Man kann also auch nur zu 7ziffrigen Zahlen die Logarithmen genau finden. Grössere Zahlen kommen in ernsthafter Praxis höchst selten vor.

Beispiele zur Uebung:

1)	log.	370978	= 5,5693482
2)	N	3,8911459	= 7782,98
3)	log.	8659536	= 6,9399116
4)	N	6,9720151	= 9375946
5)	log.	200,36054	= 2,3018128
6)	N	0,0692746	= 1,172937
7)	log.	0,07787009	= 0,8913707 — 2
8)	N	0,0911392 — 3	= 0,0012335
9)	log.	4,501000895	= 0,6533091
10)	N	0,0901392	= 1,230664

Anmerkung 1. Sämmtliche in diesem Buche vorkommenden Logarithmen sind aus einer der am meisten verbreiteten ältern stereot. Ausgaben der Vega'schen Tafeln entnommen, und können deshalb von der neueren Ausgabe, welche in den Proportionaltheilen noch die achte Decimale berücksichtigt, in der siebenten Decimale zuweilen um eine Einheit abweichen.

Anmerkung 2. Wie man mit 3-, 5- und 10ziffrigen Logarithmen-Tafeln verfährt, ergiebt sich aus der vorigen Theorie von selbst. Wer überhaupt die Einrichtung und den Gebrauch der Logarithmen-Tafeln versteht, der lernt auch die Einrichtung jeder andern mathematischen Tafel bald kennen.

Zwanzigstes Buch.

Zusammenstellung der Regeln über den Gebrauch der Logarithmen. Erläuterung durch Beispiele, welche ohne Logarithmen nur mit grosser Mühe, theils gar nicht gelöst werden können. Verschiedene Bemerkungen &c.

277.

Ist ein Product zu entwickeln, so addire man die Logarithmen der Factoren; die Summe ist dann der Logarithmus des gesuchten Products, welches man also in den Tafeln aufschlagen kann (§ 258, 1). Auch Buchstaben-Ausdrücke lassen sich nach dieser Regel, in logarithmischen Formen entwickelt, darstellen. Ist z. B.:

$$x = abc$$

wo a, b, c Factoren und x deren Product bedeutet, so ist allgemein:

$$\log. x = \log. a + \log. b + \log. c$$

Beispiel. **Man suche x aus folgender Gleichung:**

$$x = 823 \cdot 1305 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot (2,40067)(0,0067925) \cdot 2$$

logarithmische Entwickelung:

$$\begin{aligned}
\log.\ 823 &= 2,9153998 \\
\cdots\ 1305 &= 3,1156105 \\
\cdots\ \tfrac{2}{3} = \cdots\ 0,66666667 &= 0,823^{90\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{9\,4}} \Big\} - 1 \\
\cdots\ 2,40067 &= 0,380^{3\,\frac{1}{1}\,\frac{9}{2}\,\frac{8}{7}} \Big\} \\
\cdots\ 0,0067925 &= 0,8320296 - 3 \\
\cdots\ 2 &= 0,3010300 \\
\hline
\log.\ x &= 8,3683111 - 4 \\
\text{oder } \log.\ x &= 4,3683111 \ (\S\ 272,\ \text{Anmkg.}) \\
\text{mithin: } x &= 23351,3
\end{aligned}$$

278.

Um zwei Zahlen durch einander zu dividiren, subtrahire man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividendus; der Rest ist der Logarithmus des gesuchten Quotienten, den man also bloss aus den Tafeln abzuschreiben braucht. (§ 255, 2.)

Ist z. B.:

$$x = \frac{a}{b}$$

wo a den Dividendus, b den Divisor und x den Quotienten bedeutet, so ist, auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, allgemein:

$$\log. x = \log. a - \log. b.$$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = \frac{25{,}0035}{7123{,}0409}$$

Auflösung. Logarithmisch:

$$\begin{array}{rl} & \quad +3 \qquad\quad -3 \\ \log.\ 25{,}0035 = & 1{,}3980008 \\ \cdots\ 7123{,}0409 = & 3{,}8526653 \\ \hline \log.\ x = & 0{,}5453355 - 3 \\ \text{also: } x = & 0{,}003510229 \end{array}$$

Besteht der Dividend oder Divisor oder auch beide aus Factoren, so kann man die Logarithmen von beiden erst besonders suchen und dann subtrahiren. Wäre z. B.:

$$x = \frac{abc}{de}$$

so ist: $\log. x = \log. (abc) - \log. (de)$
oder: $\log. x = \log. a + \log. b + \log. c - (\log. d + \log. e)$
oder: $\log. x = \log. a + \log. b + \log. c - \log. d - \log. e$

Beispiel. Man suche x aus folgender Gleichung:

$$x = \frac{0{,}035689 \cdot 6{,}083769}{34{,}595 \cdot 0{,}0050602}$$

Auflösung. Logarithmisch:

Zähler:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 0{,}035689 = & 0{,}5525344 - 2 \\ \cdots\ 6{,}083769 = & 0{,}7841727 \\ \hline & 0{,}3367071 - 1 \end{array}$$

Nenner:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 34{,}595 = & 1{,}5390133 \\ \cdots\ 0{,}0050602 = & 0{,}7041677 - 3 \\ \hline & 0{,}2431810 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}3367071 - 1 \\ & 0{,}2431810 - 1 \\ \hline \log.\ x = & 0{,}0935261 \\ x = & 1{,}240298 \end{array}$$

279.

* Wenn (wie im vorhergehenden Beispiele) mehrere Logarithmen addi und von der Summe ein oder mehrere subtrahirt werden müssen, so kann m in dem Fall, wo die zu subtrahirenden Logarithmen genau in den Tafeln en halten sind, und also nicht erst durch Hülfe der Proportionaltheile gesucht werden brauchen, die Arbeit manchmal abkürzen, wenn man, statt Logarithm zu subtrahiren, ihre dekadischen Ergänzungen addirt und dann wieder von d Summe der Kennziffer so viele Zehner weglässt, als dekadische Ergänzung addirt sind. Die dekadische Ergänzung (d. E.) eines genau in der Tafel en haltenen Logarithmus, d. h. das, was ihm an 10 fehlt, erhält man sehr leich indem man, mit der Kennziffer angefangen, jede Ziffer des Logarithmus glei aus der Tafel von 9, und die letzte von 10 (in Gedanken) subtrahirt. Der Grun dieses kleinen, namentlich bei trigonometrischen Rechnungen häufig zu benutze den Vortheils ist leicht einzusehen. Denn, ob man einen Logarithmus subtrahi oder mit umgekehrtem Zeichen addirt, nachdem man seine Kennziffer zuvor u 10 vergrössert und verkleinert hat, das ist einerlei. Wäre z. B. der Logarithm 2,3056707 zu subtrahiren, oder, was dasselbe ist, —2,3056707 zu addiren, hat man:

$$2{,}3056707 = 10 + 2{,}3056707 - 10$$
$$= 10 - 7{,}6943293$$
$$\text{mithin } -2{,}3056707 = 7{,}6943293 - 10.$$

Ob man also —2,3056707 oder die dekadische Ergänzung 7,6943293—1 addirt, das ist einerlei.

Anstatt aber die dekadischen Ergänzungen zu benutzen (No. 1), kann ma auch eben so gut die zu subtrahirenden Logarithmen mit umgekehrtem Vo zeichen unter die zu addirenden schreiben, und bei einiger Uebung beiderl Operationen zugleich verrichten (No. 2). Anfänger möchten aber besser thu stets wie im § 278 zu verfahren.

$$x = \frac{0{,}035689 \cdot 6{,}083769}{34{,}595 \cdot 0{,}0050602}$$

No. 1.		No. 2.	
log. 0,035689	= 0,5525344 — 2	log. 0,036789	= 0,5525344—
log. 6,083769	= 0,7841727	log. 6,083769	= 0,7841727
d. E. log. 34,595	= 8,4609867 — 10	—log. 34,595	= — 1,5390133
„ „ log. 0,0050602	= 9,2958323 + 3 — 10	—log. 0,0050602	= — 0,7041677+
log. x	= 0,0935261	log. x	= 0,0935261

$$x = 1{,}240298.$$

280.

Um eine Zahl auf eine Potenz zu erheben, muss man de Logarithmus der Zahl mit dem Potenz-Exponenten multipliciren, s erhält man den Logarithmus der Potenz. Man hat z. B. (§ 258, 3)

$$\log. a^4 = \log. aaaa = \log. a + \log. a + \log. a + \log. a$$
$$\text{also: } \log. a^4 = 4 \log. a$$
$$\text{allgemein: } \log. a^n = n \log. a$$
$$\text{eben so: } \log. a^x = x \log. a$$

Man suche x aus folgenden Gleichungen:

1) $x = (1{,}3504)^{22}$

Auflösung. Logarithmisch:

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 1{,}3504 = & 0{,}1304624 \\ & 22 \\ \hline & 2609248 \\ & 2609248 \\ \hline \text{log. } x = & 2{,}8701728 \\ \text{also } x = & 741{,}6052 \end{array}$$

$$2) \; x = \left(\tfrac{200}{331}\right)^{10}$$

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 200 = & 2{,}3010300 \\ \text{„ } 331 = & 2{,}5198280 \; (\S\ 272) \\ \hline & 0{,}7812020 - 1 \\ & 10 \\ \hline & 7{,}8120200 - 10 \\ \hline \text{log. } x = & 0{,}8120200 - 3 \\ \text{mithin } x = & 0{,}006486643 \end{array}$$

281.

Um aus einer Zahl eine Wurzel zu ziehen, braucht man nur den Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten zu dividiren; der Quotient ist dann der Logarithmus der gesuchten Wurzel. Es ist nämlich (§ 258, 4):

$$\text{log. } \sqrt[5]{a} = \text{log. } a^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5} \text{ log. } a;$$

$$\text{allgemein: log. } \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{ log. } a.$$

Beispiele:

$$1) \; x = \sqrt[7]{2}$$

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 2 = & 0{,}3010300 \\ 7) & \\ \hline \text{log. } x = & 0{,}0430043 \\ \text{also } x = & 1{,}104089 \end{array}$$

Hat man aus einem ächten Bruche eine Wurzel zu ziehen, also dessen negativen Logarithmus durch eine Zahl zu dividiren, so muss man (damit der negative Logarithmus die zum Aufsuchen des ihm zugehörigen Decimalbruchs bequeme Form behält, § 270) zur positiven und negativen Kennziffer erst so viele Einheiten addiren, dass sich die negative Kennziffer durch den Wurzelexponenten ohne Rest theilen lässt. So findet man z. B.:

$$x = \sqrt[5]{0{,}0375}$$

$$\log.\ 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$$
$$= 3{,}5740313 - 5$$
$$5)\overline{}$$
$$\log.\ x = 0{,}7148063 - 1$$
$$\text{also } x = 0{,}5185687$$

282.

Kommen in einer logarithmisch zu entwickelnden Grösse Factoren oder Divisoren vor, welche Potenzen sind, so muss man natürlich von allen Wurzeln der verschiedenen Potenzen die Logarithmen besonders nehmen und mit ihren Exponenten multipliciren wie es folgende Beispiele andeuten:

1) $x = aaabb = a^3 b^2$

$$\log.\ x = \log.\ a + \log.\ a + \log.\ a + \log.\ b + \log.\ b$$

$$\text{kürzer: } \log.\ x = 3 \log.\ a + 2 \log.\ b$$

2) $x = a^m b^n c^n$

$$\log.\ x = m \log.\ a + n \log.\ b + n \log.\ c$$

3) $x = a^{\frac{m}{n}} \sqrt[m]{b^n} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{m}}$

$$\log.\ x = \frac{m}{n} \log.\ a + \frac{n}{m} \log.\ b$$

283.

Unmittelbar kann man nur dann ein Product mit Logarithmen berechnen, wenn die Factoren eintheilige Grössen sind. Vieltheilige Factoren muss man als eintheilige betrachten, oder wenn die einzelnen Theile Zahlen sind, sie zuvor in eintheilige Grössen zusammenziehen, und daher jeden Theil, der eine Potenz oder Wurzelgrösse ist, erst besonders mit Logarithmen berechnen. Sei z. B.:

1) $x = a^m (a + b)^n$

$$\text{so ist: } \log.\ x = m \log.\ a + n \log.\ (a + b)$$

2) $x = \dfrac{(a + b^m)^n (a + b)}{(a - 1)^n}$

$$\log.\ x = n \log.(a + b^m) + \log.(a + b) - n \log.(a - 1)$$

3) $x = \sqrt[15]{\left(\frac{15}{32} - \sqrt[5]{\frac{3}{1144}}\right)}$

$$\begin{aligned}
\log.\ 3 &= 0,4771213 \\
\cdots\ 1144 &= 3,0584260 \\
&\ \overset{+2}{}\quad\ \ \overset{-2}{} \\
&\ 0,4186953 - 3\} \quad (\S\ 281) \\
&5)\ \overline{} \\
&\ 0,4837391 - 1 \\
\sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}} &= 0,3046064 \\
\tfrac{15}{32} &= 0,46875 \\
&\ 0,1641436 = \tfrac{15}{32} - \sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}} \\
&\ \overset{+14}{}\quad\ \ \overset{-14}{} \\
\log.\ \left(\tfrac{15}{32} - \sqrt[5]{\tfrac{3}{1144}}\right) &= 0,2152240 - 1 \\
&15)\ \overline{} \\
\log.\ x &= 0,9476816 - 1; \\
\text{also } x &= 0,886506
\end{aligned}$$

284.

Da wir mittelst Logarithmen jede Wurzel von beliebigem Grade ausziehen können, so ist es jetzt auch leicht, alle reine höhere Gleichungen zu lösen. Würde z. E. aus folgender reinen Gleichung vom 11ten Grade x gesucht (§ 219):

$$\tfrac{2}{3}x^{11} + 0,501 = 2x^{11} + 6,05$$

so ist: $\tfrac{2}{3}x^{11} - 2x^{11} = -0,501 + 6,05$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{4}{3}x^{11} &= 5,549 \\
x^{11} &= -4,16175 \\
x &= \sqrt[11]{-4,16175} \qquad (\S\ 216,\ 3) \\
\log.\ 4,16175 &= 0,6192760\,(n) \\
&11)\ \overline{} \\
\log.\ x &= 0,0562978\,(n) \\
x &= -1,138407.
\end{aligned}$$

Anmerkung. Durch das dem Logarithmus angehängte (n) deutet man an, dass die zu ihm gehörige Zahl mit dem Minus-Zeichen (negativ) genommen werden muss. Da die Logarithmen von ganzen Zahlen positiv, von ächten Brüchen negativ sind, so ist klar, dass man in den Tafeln zu negativen Zahlen keine Logarithmen finden kann. Um also mittelst der Logarithmen negative Zahlen mit einander zu multipliciren, dividiren, potentiiren &c. muss man diese Zahlen während der Rechnung mit Logarithmen als positiv nehmen und dann vor das Resultat wieder das gehörige Vorzeichen setzen.

285.

Mit Hülfe der Logarithmen ist es nun oftmals auch leicht, die in einer Gleichung enthaltene unbekannte Grösse selbst dann zu

finden, wenn sie auch als Exponent vorkommt. Würde z. E. gefragt, auf welche Potenz die Zahl 2 erhoben werden muss, um die Zahl 64 hervorzubringen, so ist, wenn man den unbekannten Exponenten vorläufig mit x bezeichnet:

$$2^x = 64$$

Auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, kommt (§ 280):

$$x \log. 2 = \log. 64$$

Auf beiden Seiten durch den Coefficienten von x dividirt, kommt:

$$x = \frac{\log. 64}{\log. 2} = \frac{1{,}8061800}{0{,}3010300}$$

$$\text{also } x = 6.$$

Anmerkung. Man muss $\frac{\log. 64}{\log. 2}$ nicht verwechseln mit $\log. \frac{64}{2} = \log. 64 - \log. 2$. Im letztern Fall hat man zwei Logarithmen von einander zu subtrahiren, im erstern aber wirklich durch einander zu dividiren. Hier kann man aber auch, wenn es bequemer ist, die Logarithmen als gewöhnliche Zahlen betrachten und den logarithmischen Quotienten wieder durch Logarithmen berechnen, indem man nach § 278 Logarithmen von Logarithmen nehmend, den des Divisors von dem des Dividendus subtrahirt und zu dem neuen Logarithmus die Zahl aufschlägt.

2) Allgemein wenn:

$$a^x = b$$

$$\text{so ist } x \log. a = \log. b$$

$$x = \frac{\log. b}{\log. a}$$

3) $a^{mx} b^{n - \frac{x}{2}} = c^{k-x} . d.$

$$mx \log. a + (n - \tfrac{x}{2}) \log. b = (k - x) \log. c + \log. d$$

$$xm \log. a + n \log. b - \tfrac{x}{2} \log. b = k \log. c - x \log. c + \log. d$$

$$xm \log. a - \tfrac{x}{2} \log. b + x \log. c = k \log. c + \log. d - n \log. b$$

$$x (m \log. a + \log. c - \tfrac{1}{2} \log. b) = k \log. c + \log. d - n \log. b$$

$$x = \frac{k \log. c + \log. d - n \log. b}{m \log. a + \log c - \frac{1}{2} \log. b}$$

286.

1. Aufgabe. Man suche x aus der Gleichung:

$$a \cdot c^{mx} - b \cdot c^{\frac{mx}{2}} = d.$$

Auflösung. Setzt man einstweilen $c^{\frac{mx}{2}} = z$, folglich $c^{mx} = z^2$, so ist:

$$az^2 - bz = d$$

und hieraus (§ 231):

$$z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}$$

$$e^{\frac{mx}{2}}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ad}}{2a}$$

$$\frac{xm}{2}\log. c=\log.\left(\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ad}}{2a}\right)$$

$$x=\frac{2}{m\log. c}\cdot\log.\left(\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ad}}{2a}\right)$$

* **2. Aufgabe.** Man suche x aus der Gleichung:

$$a^x+\frac{1}{a^x}-b=0$$

Auflösung. Man findet leicht (mit a^x multiplicirt und $a^x=z$ gesetzt, § 231):

$$x=\frac{\log. \frac{1}{2}(b\pm\sqrt{b^2-4}}{\log. a}$$

287.

3. Aufgabe. Zwischen 2 und 8 sollen vier Glieder so eingeschaltet (interpolirt) werden, dass dann alle sechs Glieder eine geometrische Progression bilden.

Auflösung. Gegeben $a=2$; $t=8$; $n=6$ und e gesucht. Aus $t=ae^{n-1}$ (§ 253) folgt:

$$e=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

$$\log. e=\frac{\log. t-\log. a}{n-1}=\frac{\log. 8-\log. 2}{6-1}$$

$$e=1{,}319508.$$

Die Reihe ist also:

2, $2\cdot(1{,}319\cdots)$, $2\cdot(1{,}319\cdots)^2$, $2\cdot(1{,}319\cdots)^3$, $2\cdot(1{,}319\cdots)^4$, 8.

288.

4. Aufgabe. Sessa, der Erfinder des Schachspiels, wurde von dem indischen König Scheran aufgefordert, sich für seine Erfindung eine königliche Belohnung zu wählen. Sessa erbat sich darauf die Summe der Weizenkörner, welche herauskommt, wenn das erste Feld des Schachbretts mit 1 Korn, das zweite mit 2, das dritte mit 4 und so, nach dieser Progression, alle 64 Felder durch, besetzt werden; nämlich: $1+2+4+8+16\cdots+2^{63}$. Wie gross ist die ganze Summe?

Auflösung. Gegeben $a=1$, $e=2$, $t=2^{63}$ und s gesucht (§ 254).

$$s = \frac{te - a}{e - 1}$$

$$s = \frac{2^{63}.2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 2^{64}$$

$$s = 18446750000000000000.$$

Die Summe beträgt also über 18 Trill. Genauer ist sie 18446744073709551615. Die letzten Ziffern können mittelst Logarithmen nicht gefunden werden, da diese über alle Vorstellung grosse Zahl die Gränzen der Tafeln überschreitet. 18 Trillionen Körner könnte die ganze Erde, wenn auch alles feste Land besät würde, selbst bei den ergiebigsten Ernten, nicht in 70 Jahren aufbringen.

289.

5. Aufgabe. Ein Weinfass hält a z. B. 100 Maass Wein, hievon werden b z. B. 1 Maass abgezapft und eben so viel Wasser wieder zugegossen. Nachdem sich Wasser und Wein vollkommen gemischt haben, werden von der Mischung abermals b Maass abgezapft und der Mangel wieder durch b Maass Wasser ergänzt. Wenn nun dieses n z. B. 20mal geschieht, wie viel Wein ist dann noch in der Mischung enthalten?

Auflösung. Um hier leichter auf den Ansatz zu kommen, überlege man die Sache so: Wird von 100 Maass Wein 1 Maass, d. h. der $\frac{1}{100}$ Theil, abgezapft und durch Wasser ergänzt, so bleiben noch 99 Maass Wein im Fasse. Wird von der wiederum 100 Maass haltenden Mischung 1 Maass, d. i. der $\frac{1}{100}$ Theil, abgezapft, so muss doch von jeder Maass der Mischung der $\frac{1}{100}$ Theil, mithin $\frac{1}{100}$.99 Maass Wein und $\frac{1}{100}$ Maass Wasser abfliessen, denn so viel mal mehr Wein als Wasser im Fasse ist, so viel mal mehr muss auch von ersterem abfliessen. Nach dem zweiten Abzapfen bleibt also noch $99 - \frac{1}{100}.99$ Wein (und $1 - \frac{1}{100}.1$ Wasser) zurück. Nach abermaliger Ergänzung und Abzapfung fliesst von jeder Sorte wieder der $\frac{1}{100}$ Theil ab. Mithin bleibt nach der dritten Abzapfung noch $(99 - \frac{1}{100}99) - \frac{1}{100}(99 - \frac{1}{100}99)$ reiner Wein zurück &c. Allgemein: wird von a Maass Wein b Maass, d. i. der $\frac{b}{a}$ Theil abgezapft, so bleiben noch $a - \frac{b}{a}.a = a - b$ Maass Wein zurück. Nach der Füllung wieder b Maass von der Mischung, also $\frac{b}{a}(a-b)$ Maass Wein abgezapft, bleiben noch

$$(a-b) - \frac{b}{a}(a-b) = \frac{a(a-b) - b(a-b)}{a} = \frac{(a-b)^2}{a} \text{ Maass Wein}$$

zurück, nach der dritten Abzapfung bleibt noch $\frac{(a-b)^2}{a} - \frac{b}{a}\cdot\frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$ nach der vierten Abzapfung $\frac{(a-b)^4}{a^3}$ &c. Heisst also x der Rest des Weines, welcher nach der $n$ten Abzapfung noch im Fasse oder in der Mischung ist, so hat man allgemein:

$$x = \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$$

$$\log. x = n \log. (a-b) - (n-1) \log. a.$$

Ist z. B. $a = 100$; $b = 1$; $n = 20$

so hat man $\log. x = 20 \log. 99 - 19 \log. 100$

$$x = 81,79072.$$

Einundzwanzigstes Buch.

Zinseszinsen - Rechnung.

290.

Wenn die Zinsen eines Capitals, so wie sie fällig sind, gleich wieder als neues Capital anderweitig auf Zinsen gegeben, oder was dasselbe ist, gleich zum Capital geschlagen, und also im folgenden Zeitraum mit verzinset werden, so sagt man, das Capital stehe auf Zinseszinsen.

Dass ein solches Zinseszinsen tragendes Capital sehr schnell anwachsen muss, und mit der Zeit jede beliebige Grösse erreichen kann, ist vorauszusehen. Giebt man z. E. nur 100 Thlr. zu 5 % ein Jahr auf Zinsen, so hat man nach Verlauf dieses Jahrs an Capital und Zinsen $100 + \frac{100}{100} \cdot 5 = 105$ Thlr. zu fordern, und kann also, wenn man beides auf's neue zu denselben Procenten stehen lässt, einen Wechsel auf 105 Thlr., ebenso nach Verlauf des 2ten Jahrs einen Wechsel auf $105 + \frac{105}{100} \cdot 5 = 110\frac{1}{4}$ Thlr., am Ende des 3ten Jahrs auf $110\frac{1}{4} + \frac{110\frac{1}{4}}{100} \cdot 5 = 115\frac{61}{80}$ Thlr. ausgestellt, verlangen &c.

Fälle dieser Art kommen im gemeinen Leben täglich vor, namentlich im Finanz-, merkantilischen und ökonomischen Fache; bei allen Versorgungs-Anstalten, Tontinen, Wittwen-, Waisen-, Leibrenten-, Central-, Lebensversicherungs- und Dienstboten-Cassen, Leihbanken und allen andern öffentlichen Fonds, deren vernünftige Einrichtung und gewissenhafte Verwaltung die Kenntnisse der Zinseszinsen-Rechnung, als deren Grundlage, voraussetzt.

291.

Aufgabe. Bezeichnet man ein Zinseszinsen tragendes Capital allgemein durch a, die jährlichen Procente durch p, die Zeit, während welcher es steht (in Jahren ausgedrückt), durch n, und den erreichten Anwachs (Accumulation), nämlich Grundcapital und Zinseszinsen, durch A, so ist offenbar jede der vier Grössen A, a, p, n eine bestimmte Function von den drei übrigen. Um nun einen klaren Begriff von dem Zusammenhang dieser vier Grössen zu erhalten, sollen die Gleichungen für dieselben gefunden werden.

Auflösung. Man suche zuerst die Function für A, woraus sich dann die andern durch Reduction leicht ableiten lassen.

Nach Verlaut des ersten Jahrs wird das Grundcapital a zu: $a + \frac{a}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})$, d. h man erhält den Anwachs des Capitals a am Ende des ersten Jahrs, wenn man es mit der Grösse $1 + \frac{p}{100}$ multiplicirt. Mit Anfang des 2ten Jahrs wird nun das neue Capital $a(1 + \frac{p}{100})$ belegt, mithin ist dessen Anwachs am Ende des zweiten Jahrs, indem man den vorhergehenden Schluss wiederholt und nochmals mit $1 + \frac{p}{100}$ multiplicirt, $= a(1 + \frac{p}{100})^2$; denn das mit Anfang des 2ten Jahres schon auf $a(1 + \frac{p}{100})$ angewachsene Grundcapital wird, mit den Zinsen, am Ende des 2ten Jahrs zu:

$$a(1 + \frac{p}{100}) + \frac{a(1 + \frac{p}{100})}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})[1 + \frac{p}{100}] = a(1 + \frac{p}{100})^2$$

am Ende des dritten Jahrs $= a(1 + \frac{p}{100})^3$; allgemein am Ende des $n$ten Jahrs $= a(1 + \frac{p}{100})^n$. Mithin ist:

$$A = a(1 + \frac{p}{100})^n$$

Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$1 + \frac{p}{100} = z$$

$$\text{so ist } A = a \cdot z^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Für $p = 5\,\%$ ist $z = 1{,}05$; für $p = 4\,\%$ ist $z = 1{,}04$; für $p = 3\frac{1}{2}\,\%$ ist $z = 1{,}035$ &c.

Nimmt man auf beiden Seiten der obigen Gleichung die Logarithmen, so findet man folgende vier Formeln:

$$\log. A = \log. a + n \log. z \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\log. a = \log. A - n \log. z \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\log. z = \frac{\log. A - \log. a}{n} \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log. A - \log. a}{\log. z} \ldots\ldots\ldots (4)$$

292.

1. Aufgabe. Wie gross wird das Capital von 6000 Thlr., wenn es 16 Jahre zu 5 % Zinseszinsen steht?

Auflösung. Gegeben $a = 6000$; $n = 16$; $z = 1{,}05$ und A gesucht. Mithin nach Formel (1):

$$A = a \cdot z^n$$

$$\log. z = 0{,}0211893$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 1271358 \\ 211893 \\ \hline 0{,}3390288 \end{array}$$

$$\log. a = 3{,}7781513$$

$$\log. A = 4{,}1171801$$

$$A = 13097 \text{ (nahe)}$$

Anmerkung. Subtrahirt man das Grundcapital von dem Anwachs A, so erhält man den Betrag der aufgelaufenen Zinseszinsen.

293.

2. Aufgabe. Wie gross muss das Capital sein, welches zu 4% Zinseszinsen belegt, in 10 Jahren auf 300 Thlr. anwächst?

Auflösung. Gegeben $z = 1{,}04$; $n = 10$; $A = 300$ und a gesucht. Aus der Formel $A = az^n$ folgt:

$$a = \frac{A}{z^n}$$

$$\log. a = \log. A - n \log. z$$

$$\log. z = 0{,}0170333$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 0{,}1703330 \end{array}$$

$$\log. A = 2{,}4771213$$

$$\log. a = 2{,}3067883$$

$$a = 202{,}669 \cdot\cdot$$

Anmerkung. Der hier gefundene Werth von $a = 202{,}669$ Thlr. heisst der auf 10 Jahre mit 4% discontirte Werth von 300 Thlr.

294.

3. Aufgabe. Ein Capital von 900 Thlr. ist mit seinen Zinseszinsen in 12 Jahren auf 1100 Thlr. angewachsen. Zu wie viel Procent war es belegt?

Auflösung. Es ist hier gegeben: $A = 1100$; $a = 900$; $n = 12$ und p gesucht. Man suche erst $z = 1 + \frac{p}{100}$, woraus dann p leicht zu finden. Aus der Grundformel $A = az^n$ folgt:

$$z^n = \frac{A}{a}$$

$$z = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$\log. z = \frac{\log A - \log. a}{n}$$

$$\log. A = 3{,}0413927$$

$$\cdots\ a = 2{,}9542425$$

$$\begin{array}{r} \hline 0{,}0871502 \end{array}$$

$$12)\ \overline{\phantom{0{,}0871502}}$$

$$\log. z = 0{,}0072625$$

$$z = 1{,}01686 = 1{,}017 \text{ (nahe)}$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}017$$

$$p = 1\tfrac{7}{10}\ \%$$

295.

4. Aufgabe. Wie lange muss das Capital von 600 Thlr. zu 5 % Zinseszinsen stehen, um auf 800 Thlr. zu kommen?

Auflösung. Gegeben $a=600$; $z=1{,}05$; $A=800$ und n gesucht. Aus der Grundformel $A=az^n$ folgt:

$$n=\frac{\log. A-\log. a}{\log. z}$$

$$\begin{aligned} \log. A &= 2{,}9030900 \\ \cdots\ a &= 2{,}7781513 \\ \hline & \ 0{,}1249387 \\ \hline \log. z &= 0{,}0211893 \\ n &= 5{,}89\cdots \text{Jahre.} \end{aligned}$$

296.

1. Aufgabe. Ein zu 2000 Klaftern abgeschätztes Forstrevier verbessert sich jährlich um den 50sten Theil, d. i. 2 Klafter auf je 100, also um 2 %; wie gross wird es bei stetem Zuwachs nach 20 Jahren sein?

Antwort. 2971,9 Klafter.

2. Aufgabe. Nach der Sündfluth sollen nur 3 Paar Menschen gelebt haben, deren Fortpflanzung vermöge ihres hohen Alters in 200 Jahren eine Million Köpfe zählte. Wie viel Procent oder den wievielsten Theil betrug die jährliche Zunahme?

Antwort. $6\frac{1}{6}$ % oder den 16ten Theil beinahe.

3. Aufgabe. Wie gross ist der gegenwärtige Werth eines erst nach 15 Jahren fälligen Capitals von 1000 Thlr., oder, was dasselbe ist: Jemand ist genöthigt, eine, erst nach 15 Jahren anzutretende Erbschaft, an Werth 1000 Thlr., gleich zu verkaufen; wie viel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, 5% gerechnet?

Antwort. Man muss den Werth von 1000 Thlr. auf 15 Jahre discontiren, d. h. ein Capital a suchen, welches nach 15 Jahren mit 5% Zinseszinsen auf 1000 Thlr. anwächst. Man findet (nach Formel 2) $a=481{,}017$ Thlr.

4. Aufgabe. Ein Wucherer leihet Jemanden 500 Thlr. und lässt sich darüber einen nach $2\frac{1}{2}$ Jahren ohne Zinsen zahlbaren Wechsel auf 700 Thlr. ausstellen. Wie viel Procent hat dieser jährlich genommen?

Antwort. Ueber 14%.

5. Aufgabe. Wie viel hätte ein zu Christi Geburt zu 5% belegter Pfennig bis 1861 eintragen können?

Antwort. $\log. A=\log. 1+1860.\log. 1{,}05=1860\ (0{,}0211893\ldots\ldots)$. Die zu dem $\log A=39{,}4120\ldots$ gehörige Zahl müsste mit 40 Ziffern geschrieben werden. Sie beträgt mehr als 2000 Sextillionen, welche Anzahl Pfennige in Gold umgesetzt und geschmolzen, eine viel grössere Kugel geben würde, als die Erde.

6 Aufgabe. Wie gross wird ein zu 5% belegtes Capital von 6000 Thlr. in 10 Jahren, mit halbjährlicher Zinszahlung, d. h. $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$% halbjährlich gerechnet?

Antwort. Weil hier ausdrücklich halbjährliche Zinszahlung bedungen ist, so muss man ein halbes Jahr als Zeit-Einheit betrachten und mithin 20 Jahre statt 10. und $2\frac{1}{2}$% statt 5% rechnen, alsdann findet man: 9831,7 Thlr.

297.

* Wenn Jemand ein Capital, z. B. 100 Thlr., zu 6 % jährlich zu zahlenden Zinsen verleiht, das Capital aber schon nach einem Vierteljahre wieder kündigt, so kann er nach Recht und Billigkeit offenbar nicht $\frac{6}{4}$ = 1,5 Thlr. vierteljährliche Zinsen und also auch nicht an Capital sammt vierteljährlichen Zinsen 100 (1,015) = 101,5 Thlr. fordern. Weil nämlich die Zinsen und also auch die Zinseszinsen jährlich oder alle vier Vierteljahr zu zahlen bedungen sind, so muss man hier offenbar das Vierteljahr als Zeit-Einheit betrachten, und daher solche vierteljährliche Procente annehmen, welche in 4 Vierteljahren das Capital 100 Thlr. mit den vierteljährlichen Zinseszinsen auf die bedungenen 106 Thlr. bringen. Nennt man also die vierteljährlichen Zinsen x, so muss sein: $100 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 106$. Hieraus folgt: $1 + \frac{x}{100} = \sqrt[4]{1,06} = 1,01467$, und die vierteljährlichen Procente $x = 1,467$.

Wer also jährlich 6 % zu zahlen schuldig ist, braucht für ein Vierteljahr nicht 1,5, sondern nur 1,467 % zu entrichten.

Diese Untersuchung bestätigt zugleich die völlige Allgemeinheit der § 291 gefundenen Formel: $A = az^n$; sie gilt nämlich auch für die Fälle, wo n eine gemischte oder gebrochene Zahl ist.

Beispiel. Jemand giebt $a = 20000$ fl. auf Zinseszinsen zu 5 % jährlich; wie viel kann er nach $12\frac{1}{2}$ Jahren zurückfordern?

Antwort. Es ist:

$$\log. A = \log. 20000 + 12\tfrac{1}{2} \log. 1,05$$
$$A = 36804,1 \text{ fl.}$$

Hätte man aber den Anwachs erst für 12 ganze Jahre zu 5 % und dann den fernern Anwachs in dem folgenden halben Jahre statt zu $100(\sqrt{1,05} - 1)$, zu $\frac{5}{2}$ % berechnen wollen, so würde der Fehler hier freilich nur 11 fl., für ein grösseres Capital aber mehr betragen haben.

298.

Aufgabe. In wie viel Jahren kann ein Capital, a, zu dem Zinsfusse z belegt, m mal, z. B. 2, 3, 4 mal so gross werden?

Auflösung. Man setze n Jahre, so wird das Capital a zu az^n, da nun dieses $= ma$ sein soll, so hat man:

$$az^n = ma$$

oder auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Factor a dividirt:

$$z^n = m$$

$$n = \frac{\log. m}{\log. z}$$

Man sieht also, dass die gesuchte Zeit n, in welcher das Capital a auf das $m$fache wachsen soll, eine blosse Function von dem Procent und also von der Grösse des Capitals a völlig unabhängig ist. In derselben Zeit, in welcher sich ein Capital von 100 Thlr. verdoppelt, muss sich auch jedes andere zu demselben Procent belegte Capital verdoppeln.

Beispiele. 1) In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Capital, wenn es zu 5%, und in wie viel, wenn es zu 4% belegt ist?

Antwort. Hier ist $m=2$ und $z=1{,}05$

$$n=\frac{\log.\ 2}{\log.\ 1{,}05}=\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}=14{,}2\cdot\cdot$$

Zu 5% belegt, fällt also die Verdoppelung zwischen 14 und 15, mithin das Vierfache zwischen 28 und 29 Jahre &c. Zu 4% belegt, fällt die Verdoppelung zwischen 17 und 18 Jahre &c. Zu 3% nach 23,4.. Jahren.

2) Die Bevölkerung eines Staates hat sich in den letzten 39 Jahren verdoppelt. Wie viel Procent beträgt die jährliche Zunahme?

Antwort. Gegeben $m=2$; $n=39$ und z gesucht. Aus der Gleichung: $z^n=m$ folgt:

$$n \log.\ z=\log.\ m$$

$$\log.\ z=\frac{\log.\ m}{n}=\frac{0{,}3010300}{39}=0{,}0077187$$

$$z=1{,}0179$$

$$\text{mithin: } p=1{,}79.$$

Also beinahe $1\frac{3}{4}$%, d. i. reichlich der 55ste Theil.

299.

Aufgabe. Ein Capital, a, wird ausser den Zinseszinsen noch jährlich um eine bestimmte Summe, b, vergrössert, die am Ende eines jeden Jahrs, das letzte mitgerechnet, zugelegt wird. Es soll eine Function für den hiernach in n Jahren entstehenden Anwachs A, nach dem Zinsfuss z gerechnet, gefunden werden.

Auflösung. Das Capital a wird am Ende des $n$ten Jahrs zu $a\cdot z^n$; die erste Zulage steht ein Jahr weniger, also $n-1$ Jahr auf Zinseszinsen und ihr Anwachs ist folglich $=b\cdot z^{n-1}$; die zweite Zulage steht nur $n-2$ Jahre auf Zinseszinsen und wird also $=b\cdot z^{n-2}$; die dritte Zulage wird $=b\cdot z^{n-3}$; die vorletzte Zulage trägt nur ein Jahr Zinsen; die letzte Zulage trägt gar keine Zinsen. Bezeichnen wir also die Summe sämmtlicher angewachsener Capitale mit A, so ist am Ende des $n$ten Jahrs:

$$A=az^n+bz^{n-1}+bz^{n-2}+bz^{n-3}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+bz+b.$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber noch bedeutend zusammenziehen. Die Glieder, welche auf das erste (az^n) folgen, bilden offenbar eine geometrische Progression, bei welcher, rückwärts gelesen, b das erste Glied, z der Exponent, bz^{n-1} das letzte Glied und mithin die Summe aller $= \frac{bz^{n-1} \cdot z - b}{z-1} = \frac{bz^n - b}{z-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z-1}$ ist. (§ 256.) Setzen wir also statt der Progression ihre Summe, so erhält man die folgende, weit einfachere Formel, und die daraus abgeleiteten:

$$A = az^n + \frac{b(z^n - 1)}{z-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$a = \frac{A}{z^n} - \frac{b(z^n - 1)}{z^n(z-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b = \frac{(A - az^n)(z-1)}{z^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$n = \frac{\log.[A(z-1)+b] - \log.[a(z-1)+b]^{*)}}{\log.\ z} \ldots (4)$$

Anmerkung. Auf z lässt sich die Gleichung nicht reduciren, weil diese Reduction auf eine verwickelte höhere Gleichung führt. (§ 217.)

300.

Ist die jährliche Zulage dem anfänglichen Grundcapital gleich, so lässt sich die obige Formel (1), indem wir darin $b = a$ setzen und beide Glieder auf einerlei Benennung bringen, noch mehr zusammenziehen. Es ist dann:

$$A = \frac{a(z^{n+1} - 1)}{z-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = \frac{A(z-1)}{z^{n+1} - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$n + 1 = \frac{\log.A[(z-1)+a] - \log.a}{\log.\ z} \ldots (3)$$

301.

Wird aber, statt der jährlichen Zulage b, am Ende eines jeden der n Jahre eine gleiche Summe b aufgenommen, und die Grösse

*) Es folgt nämlich aus (1): $A(z-1) = a(z-1).z^n + bz^n - b$ und hieraus

$$A(z-1) + b = [a(z-1)+b].z^n$$

$$z^n = \frac{A(z-1)+b}{a(z-1)+b} \text{ \&c.}$$

des direct oder invers angewachsenen Capitals wieder durch A bezeichnet, so hat man am Ende des:

1sten Jahrs: $az-b$,
2ten Jahrs: $(az-b)z-b=az^2-bz-b$
3ten Jahrs: az^3-bz^2-bz-b
10ten Jahrs: $az^{10}-bz^9-bz^8-\cdots-bz-b$

Allgemein, am Ende des $n$ten Jahrs:

$$A=az^n-(bz^{n-1}+bz^{n-2}+bz^{n-3}+\cdots+bz+b)$$

Oder kürzer, indem man die in Klammern stehende Progression summirt:

$$A=az^n-\frac{b(z^n-1)}{z-1}\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$a=\frac{A}{z^n}+\frac{b(z^n-1)}{z^n(z-1)}\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$b=\frac{(az^n-A)(z-1)}{z^n-1}\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$n=\frac{\log.[A(z-1)-b]-\log.[a(z-1)-b]}{\log.z}\dots\dots\dots(4)$$

Ist der jährliche Abzug b kleiner, als die jährlichen einfachen Zinsen des Grundcapitals, so muss der Anwachs A offenbar immer grösser werden. Ist aber der jährliche Abzug grösser, als die jährlichen Zinsen, so muss der Anwachs A immer kleiner, also endlich einmal 0, und von da an, wenn der Abtrag noch fortdauert, invers werden, und mithin das gegenseitige Verhältniss des Gläubigers und Schuldners umkehren.

302.

Soll durch den jährlichen Abtrag b das Grundcapital a sammt den Zinseszinsen in n Jahren gerade getilgt werden, so muss in Formel (1) des vorhergehenden §, $A=0$, nämlich die beiden Glieder der rechten Seite einander gleich sein, daher:

$$\frac{b(z^n-1)}{z-1}=az^n\dots\dots\dots\dots(1)$$

Nach dieser Gleichung kann man, wenn von den vier Grössen a, b, n, z drei gegeben sind, die vierte finden (§ 299, Anm.). Es ist nämlich:

$$a=\frac{b(z^n-1)}{z^n\cdot(z-1)}\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$b=\frac{a(z-1)z^n}{z^n-1}\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$n=\frac{\log.b-\log.[b-a(z-1)]}{\log.z}\dots\dots\dots(4)$$

303.

1. Aufgabe. Wie gross wird ein zu 5 % Zinseszinsen auf 25 Jahre belegtes Capital von 5000 Thlr., wenn noch am Ende eines jeden der 25 Jahre 200 Thlr. zugelegt werden?

Antwort. 26476 Thlr. Man hat nämlich (§ 299):

$$A = az^n + \frac{b(z^n - 1)}{z - 1} \text{*)}$$

Gegeben:

$a = 5000$; $z = 1{,}05$,
$b = 200$; $n = 25$.

$$\log. z = 0{,}0211893$$
$$25$$
$$1059465$$
$$423786$$
$$\log. z^{25} = 0{,}5297325$$
$$z^{25} = 3{,}386355$$
$$(z^{25} - 1) = 2{,}386355 \text{*)}$$
$$\log. (z^{25} - 1) = 0{,}3777350$$
$$\log. b = 2{,}3010300$$
$$2{,}6787650$$
$$\log. (z - 1) = 0{,}6989700 - 2$$
$$3{,}9797950$$
$$b\frac{(z^n - 1)}{z - 1} = 9545{,}42$$

$$\log. z^{25} = 0{,}5297325$$
$$\log. a = 3{,}6989700$$
$$4{,}2287025$$
$$az^{25} = 16931{,}77$$

$$az^{25} = 16931{,}77$$
$$b\frac{(z^{25} - 1)}{z - 1} = 9545{,}42$$
$$A = 26477{,}19$$

304.

2. Aufgabe. Es werden 5500 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen angelegt, wie gross bleibt der Rest nach 30 Jahren, wenn mit Ende eines jeden Jahrs 300 Thlr. aufgenommen werden?

Antwort. 2297 Thlr. Man hat nämlich:

$$A = az^n - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1)}$$

Gegeben:

$a = 5500$; $z = 1{,}045$
$b = 300$; $n = 30$.

$$\log. z = 0{,}0191163$$
$$30$$
$$\log. z^{30} = 0{,}5734890$$
$$z^{30} = 3{,}74532$$
$$z^{30} - 1 = 2{,}74532$$
$$\log. (z^{30} - 1) = 0{,}4385930$$
$$\cdots b = 2{,}4771213$$
$$2{,}9157143$$
$$\log. (z - 1) = 0{,}6532125 - 2$$
$$4{,}2625018$$
$$b\frac{(z^{30} - 1)}{z - 1} = 18302{,}13$$

$$\log. z^{30} = 0{,}5734890$$
$$\log. a = 3{,}7403627$$
$$4{,}3138517$$
$$az^{30} = 20599{,}26$$
$$b\frac{(z^{30} - 1)}{z - 1} = 18302{,}13$$
$$A = 2297{,}13$$

*) Die zweitheiligen Grössen $(z - 1)$ und $(z^n - 1)$ müssen, ehe man ihre Logarithmen nehmen kann, erst in eintheilige zusammengezogen werden. (§ 253.)

305.

3. Aufgabe. Wie gross muss der jährliche Abtrag b sein, damit von dem auf 10 Jahre zu $2\frac{1}{2}$ % belegten Capital von 6000 Thlr. noch 1000 Thlr. übrig bleiben?

Antwort. $596\frac{3}{5}$ Thlr. Es ist nämlich (§ 304):

$$b = (az^n - A)\frac{(z-1)}{z^n - 1}$$

Gegeben:

$A = 1000$; $z = 1{,}025$;

$a = 6000$; $n = 10$.

$$\begin{aligned}
10 \log. z &= 0{,}1072390 \\
\log. a &= 3{,}7781513 \\
\hline
&\ \ \ 3{,}8853903 \\
\hline
az^{10} &= 7680{,}514 \\
A &= 1000 \\
\hline
az^{10} - A &= 6680{,}514
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^{10} &= 1{,}2800859 \\
z^{10} - 1 &= 0{,}2800859 \\
\hline
\log. (az^{10} - A) &= 3{,}8248100 \\
\cdots\cdots (z-1) &= 0{,}3979400 - 2 \\
\hline
&\ \ \ 2{,}2227500 \\
\log. (z^{10} - 1) &= 0{,}4472913 - 1 \\
\hline
\log. b &= 2{,}7754587 \\
b &= 596{,}291
\end{aligned}$$

306.

4. Aufgabe. Auf ein zu 5 % Zinseszinsen stehendes Capital von 30000 Thlr. werden jährlich 3500 Thlr. abgetragen; in wie viel Jahren wird dadurch das Capital getilgt sein?

Antwort. $11\frac{1}{2}$ Jahr (beinahe).

Man hat nämlich (§ 302):

$$n = \frac{\log. b - \log. [b - a(z-1)]}{\log. z}$$

$$\begin{aligned}
z - 1 &= 0{,}05 \\
a &= 30000 \\
\hline
a(z-1) &= 1500 \\
b &= 3500 \\
\hline
b - a(z-1) &= 2000
\end{aligned}$$

Gegeben:

$a = 30000$; $b = 3500$; $z = 1{,}05$.

$$\begin{aligned}
\log. b &= 3{,}5440680 \\
\log. [b - a(z-1)] &= 3{,}3010300 \\
\hline
&\ \ \ 0{,}2430380 \\
\log. z &= 0{,}0211893
\end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}2430380}{0{,}0211893} = 11{,}47$$

307.

5. Aufgabe. Jemand hat 25 Jahre hindurch ein jährliches Einkommen von 200 Thlr. (z. B. Niessbrauch, Rente, Actie &c.) zu beziehen. Da er aber ein Geschäft anfangen will, so entschliesst er sich, seine 25jährige Rente zu verkaufen. Wie viel kann ihm jetzt dafür gegeben werden, wenn die Zinsen $3\frac{3}{4}$ % betragen?

Antwort. 3208,64 Thlr.

Auflösung. Hier wird ein Capital a gesucht, welches sammt seinen Zinseszinsen in 25 Jahren durch den jährlichen Abtrag von 200 Thlr. getilgt ist. Diesen gegenwärtigen Werth der 25jährigen Rente findet man also nach der Formel 2, § 302.

$$a=\frac{b(z^n-1)}{z^n(z-1)};\qquad b=200;\qquad z=1{,}0375;\qquad n=25.$$

log. z=0,0159881; log.$(z^{25}-1)$=0,1790247; log.z^{25}=0,3997025

log. z = 0,0159881	log. $(z^{25}-1)$ = 0,1790247	log. z^{25} = 0,3997025
25	··· b = 2,3010300	··$(z-1)$ = 0,5740313—2
799405	2,4800547	0,9737338—2
319762		
0,3997025		

$z^{25}=2{,}510166$

$z^{25}-1=1{,}510166$

$z-1=0{,}0375$

2,4800547
0,9737338—2
log. a = 3,5063209
a = 3208,64··

308.

6. Aufgabe. Um eine Wittwenpension von jährlich $b=200$ Thlr. zu kaufen, zahlt Jemand an die Wittwen-Casse jährlich $a=50$ Thlr. Wenn nun aber der Mann erst nach $n=20$ und die Frau schon $m=8$ Jahren später stirbt, wie viel hat dann die Wittwen-Casse gewonnen oder verloren, wenn beiderseits nach dem Zinsfusse $z=1{,}04$ gerechnet wird?

Auflösung. Werden die Zahlungen beiderseits mit Anfang eines jeden Jahrs geleistet, und der Schluss der Rechnung erst nach dem verflossenen $n+m$ten Jahr gemacht, so steht die erste Einlage $n+m$ Jahre und ist also an Werth $=az^{n+m}$; die 2te Einlage steht ein Jahr weniger und ist also werth $=az^{n+m-1}$ &c. Die letzte Einlage steht nur $m+1$ Jahr und ist also az^{m+1} werth. Eben so ist der Werth der ersten Pension b nach m Jahren $=bz^m$, der letzten $=bz$. Mithin ist:

$$A=az^{n+m}+az^{n+m-1}+az^{n+m-2}\ldots+az^{m+1}-(bz^m+bz^{m-1}+\ldots+bz)$$

Beide Progressionen summirt, kommt:

$$A=\frac{az^{n+m}.z-az^{m+1}}{z-1}-\frac{bz^m.z-bz}{z-1}$$

$$A=\frac{az^{m+1}(z^n-1)-bz(z^m-1)}{z-1}$$

Den ersten Theil des Zählers hätte man auch kürzer so finden können: Die n Einlagen betragen, weil sie mit Anfang eines jeden Jahrs bezahlt werden, am Ende des $n$ten Jahrs $=\frac{az(z^n-1)}{z-1}$; dieses Capital steht nun aber noch m Jahre und wird $=\frac{az^{m+1}(z^n-1)}{z-1}$. Die obige Formel kann auch so geschrieben werden:

$$A=[az^m(z^n-1)-b(z^m-1)]\frac{z}{z-1}$$

Für den oben angegebenen Fall, wo $a=50$; $b=200$; $n=20$; $m=8$; $z=1{,}04$, hätte also die Wittwen-Casse einen Vortheil von $A=202$ Thlr.

Eben so findet man leicht die Formeln für die Fälle, wo die Zahlungen halbjährlich oder am Ende des Jahrs geleistet, oder wo die Einlagen mit Anfang,

die Pension aber mit Ende des Jahrs entrichtet werden &c. Auch andere in dieser Art vorkommende juristische, politische, staatswissenschaftliche und dergleichen Fragen wird man nach dem Vorhergehenden beantworten können, und wir beschliessen daher dieses Capitel mit ein paar schwerern Aufgaben für Geübtere.

309.

* **Aufgabe.** Wie gross ist der baare Werth a einer $n$jährigen Rente, welche durch eine geometrische Progression läuft, deren erstes Glied b und deren Exponent e ist; wo also am Ende des ersten Jahrs die Rente b, am Ende des zweiten Jahrs die Rente be, am Ende des dritten Jahrs die Rente be^2 &c., am Ende des nten Jahrs be^{n-1} gehoben wird, und die Rente mithin von Jahr zu Jahr in dem Verhältniss $1:e$ wachsen oder abnehmen muss, je nachdem $e \gtrless 1$ ist.

Auflösung. Es ist am Ende des $n$ten Jahrs der Werth der:

$$\begin{array}{rl} \text{1sten Rente} & = bz^{n-1} \\ \text{2ten Rente} & = be.z^{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ n-\text{1ten Rente} & = be^{n-2}.z \\ n\text{ten Rente} & = be^{n-1} \end{array}$$

Der für alle Renten mit Anfang des ersten Jahrs gezahlte baare Werth a wird nach n Jahren zu az^n. Mithin muss sein:

$$az^n = b.z^{n-1} + be.z^{n-2} + be^2.z^{n-3} + \ldots + be^{n-2}.z + be^{n-1}.$$

Die zweite Seite dieser Gleichung bildet eine geometrische Progression, wo bz^{n-1} das erste, be^{n-1} das letzte Glied, $\frac{e}{z}$ der Exponent, und deren Summe

$$\text{mithin (§ 256)} = \frac{be^{n-1}\frac{e}{z} - bz^{n-1}}{\frac{e}{z} - 1} = \frac{be^n - bz^n}{e - z} \text{ ist.}$$

Man hat also kürzer:

$$az^n = \frac{be^n - bz^n}{e - z}$$

$$\text{und } a = \frac{b.(e^n - z^n)}{z^n(e - z)} = \frac{b\left\{\left(\frac{e}{z}\right)^n - 1\right\}}{e - z}$$

310.

* **Aufgabe.** Wie gross ist der baare Werth der durch n Jahre nach der arithmetischen Progression b, $2b$, $3b$, $4b$, $\cdot\cdot nb$ fortlaufenden Rente, wo also am Ende des ersten Jahrs b, und in jedem folgenden Jahre b mehr, als im nächst vorhergehenden, gehoben wird?

Auflösung. Heisst a der gegenwärtige Werth, so ist:

$$az^n = bz^{n-1} + 2b.z^{n-2} + 3b.z^{n-3} + \cdots + (n-1)bz + nb.$$

Diese, aus einer arithmetischen und geometrischen Progression zusammengesetzte Reihe lässt sich in eben so viele geometrische Progressionen zerlegen, als Glieder vorhanden sind und dann summiren, wenn man zuvor jedes Glied in so viele Theile zerlegt, als der davor stehende numerische Coefficient Einheiten hat. Es ist nämlich:

$$2bz^{n-2} = bz^{n-2} + bz^{n-2}; \quad 3bz^{n-3} = bz^{n-3} + bz^{n-3} + bz^{n-3} \text{ \&c.}$$

Mithin:

$$az^n = \left\{ \begin{array}{l}
bz^{n-1} + bz^{n-2} + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots (1) \\
\quad + bz^{n-2} + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots (2) \\
\quad\quad + bz^{n-3} + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots (3) \\
\quad\quad\quad + bz^{n-4} + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots (4) \\
\quad\quad\quad\quad + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots (5) \\
\quad\quad\quad\quad + \ldots + bz^2 + bz + b \ldots\ldots\ldots (6) \\
\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\
\quad\quad\quad\quad\quad + bz^2 + bz + b \ldots\ldots (n-2) \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + bz + b \ldots\ldots (n-1) \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + b \ldots\ldots (n)
\end{array} \right.$$

Jede Querreihe bildet eine geometrische Progression, deren Exponent z ist, und es ist die Summe der Reihe:

$$(1), = \frac{bz^{n-1}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^n - 1)}{z-1}$$

$$(2), = \frac{bz^{n-2}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^{n-1} - 1)}{z-1}$$

$$(3), = \frac{bz^{n-3}.z - b}{z-1} = \frac{b(z^{n-2} - 1)}{z-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n-2), = bz^2 + bz + b = \frac{bz^2.z - b}{z-1} = \frac{b(z^3 - 1)}{z-1}$$

$$(n-1), = bz + b = \frac{bz.z - b}{z-1} = \frac{b(z^2 - 1)}{z-1} \text{ (§ 142, 2)}$$

$$(n), = b = \frac{b.z - b}{z-1} = \frac{b.(z-1)}{z-1}$$

Setzt man also in obige Gleichung statt der n Reihen ihre Summen, so ist:

$$az^n = \frac{b}{z-1}(z^n - 1) + \frac{b}{z-1}(z^{n-1} - 1) + \ldots\ldots + \frac{b}{z-1}(z^2 - 1) + \frac{b}{z-1}(z-1)$$

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{z^n - 1 + z^{n-1} - 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^2 - 1 + z - 1\right\}$$

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{z^n + z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + z^2 + z - (1 + 1 + \ldots + 1)\right\}$$

Die Summe der in Klammern stehenden Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ ist $= n$, weil n Glieder (Einheiten) vorhanden sind, die Summe der andern geometrischen Reihe ist $= \frac{z^n . z - z}{z-1} = \frac{z(z^n - 1)}{z-1}$.

Substituirt man diese Summen, so kommt:

$$az^n = \frac{b}{z-1}\left\{\frac{z}{z-1}(z^n - 1) - n\right\}$$

thin ist:

$$a = \frac{b}{z^n(z-1)}\left\{\frac{(z^n - 1)z}{z-1} - n\right\}$$

Anhang.

Anmerkungen und Ergänzungen.

311.

Zu § 1. Man muthmasst, dass zu unserm, allgemein üblichen Verfahren, mit zehn Wörtern alle Zahlen zu benennen, die zehn Finger Veranlassung gegeben haben. Mit Gewissheit kann man aber dieses nicht behaupten, da es ursprünglich ganz willkürlich war, und man die Zahlen auch eben so gut mit mehr oder weniger Grundwörtern hätte benennen können. So hätte man z. E. Anfangs nur bis vier zu zählen brauchen, und dann, statt für die auf vier folgende Zahl ein neues Wort zu ersinnen. eins und vier, oder kürzer einsvier sagen können, dann zweivier, dreivier, viervier oder zweimal vier; ferner eins und zweimal vier &c. Die Wörter eins und zweimalvier, zwei und zweimalvier &c. hätte man dann auch wie § 1, durch Auslassung der Silbe „mal" und Veränderung der Silbe vier in kürzere verwandeln können — Nach Aristoteles' Berichten hat es ein thracisches Volk gegeben, welches auf diese Weise zählte. Noch jetzt soll ein zehnfingeriges Volk. die Jalofs. in der Nachbarschaft des Senegals wohnen, welches zur Benennung der Zahlen nur fünf Grundwörter gebraucht, und so zählt:

ben,	*niard*,	*niet*,	*guyanet*,	*guiron*,	*guiron ben*,	*guiron niard*,
(ein)	(zwei)	(drei)	(vier)	(fünf)	(fünf und eins)	(fünf und zwei)

Mehreres hierüber, so wie über die Zahlzeichen der Römer, Griechen. Hebräer und anderer Völker sehe man in Montucla, histoire des Mathématiques. Tom I, pag. 45 et 375 und Klügel's Mathem. Wörterbuch 5. Theil, pag. 1166 u. f.

312.

Zu § 6. 1) Dass man statt 10 auch jede andere beliebige Menge Einheiten als Grundzahl eines Zahlensystems annehmen kann, und dann nach demselben einfachen Gesetz zur Darstellung aller Zahlen nicht mehr Ziffern braucht, als die gewählte Grundzahl Einheiten hat, ist klar. Hätte man z. E. die Uebereinkunft getroffen, vier zur Grundzahl eines Zahlensystems zu machen, mithin diese Grundzahl vier als Einheit ersten Ranges und also vier solche Einheiten ersten Ranges, d. i. sechszehn als eine neue Einheit zweiten Ranges anzusehen u. s f., so hätte man auch nur die vier Ziffern 1, 2, 3, 0 nöthig gehabt, um damit, in dem hiernach entstehenden Zahlensystem, die sogenannte *Tetradik*, alle möglichen Zahlen zu bezeichnen. In diesem System ist also jede Einheit einer links stehenden Ziffer viermal so gross, als die Einheit der nächst rechts stehenden Ziffer; weil nämlich je vier Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst höhern Ranges machen, so muss man vier als Einheit ersten Ranges durch 10 bezeichnen, fünf durch 11; sechs, 12; sieben, 13: acht, als zwei Einheiten ersten Ranges, durch 20; neun, 21; elf, 23; zwölf, 30; fünfzehn, 33; sechszehn, als vier Einheiten ersten Ranges oder eine Einheit zweiten Ranges durch 100; siebzehn 101 u. s. f

Eben so hätte man auch zwei als Grundzahl nehmen und nach dem einfachen Gesetz. dass je zwei Einheiten irgend eines Ranges eine Einheit nächst

höheren Ranges machen sollen, bloss mit den beiden Ziffern 1 und 0 alle Zahlen bezeichnen können, nämlich: eins, 1; zwei als Einheit ersten Ranges durch 10; drei, 11; vier, als zwei Einheiten ersten oder eine Einheit zweiten Ranges, durch 100; fünf 101; sechs 110; sieben 111; acht, als zwei Einheiten zweiten oder eine Einheit dritten Ranges, durch 1000; neun, 1001; zehn, 1010 u. s. f. Dieses System die sogenannte *Dyadik*, sollen vor Zeiten die Chinesen gebraucht, statt des Stellzeichens 0 aber einen Querstrich (—) gesetzt haben. Ausser einem practischen Nutzen dieses Systems zur Entdeckung merkwürdiger Eigenschaften der Zahlen und deren Theilbarkeit, wollte Leibnitz noch darin ein treues Bild der Schöpfung finden und suchte durch Erklärung desselben und durch Vermittelung des Jesuiten Grimaldi, Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, die Chinesen zum Uebertritt zur christlichen Religion zu bewegen.

Gleicherweise hätte man auch die Zahl zwölf zur Grundzahl machen und für die beiden Zahlen zehn und elf noch zwei einfache Zeichen, wie etwa α und β, einführen können. Hiernach würde man also schreiben: neun, 9; zehn α; elf β; zwölf (als Einheit ersten Ranges) 10; dreizehn 11; dreiundzwanzig 1 β; vierundzwanzig 20 u. s. f. Es ist noch gar nicht lange, als man ernstlich darauf dachte, dieses System, die *Duodecadik*, statt der *Decadik*, einzuführen, und zwar zuerst aus dem theoretischen Grunde, weil es zwölf Apostel gegeben hat; später aber aus dem practischen Grunde, weil die Zahl 12 mehr Factoren als die Zahl zehn hat, welches beim Rechnen bedeutende Vortheile gewähren sollte. Sei es nun, dass die Mathematiker diesen practischen Nutzen, oder die Wichtigkeit jenes frommen Grundes nicht begreifen können, sie haben beides nicht beherzigt und nichts zur Ausführung jener Verbesserung beigetragen. Man sieht also, dass unendlich viele Zahlensysteme möglich sind, und es ist in der That zu verwundern, dass nicht die alten Griechen und namentlich Archimedes, der geistreichste Mathematiker unter ihnen, auf die wichtige Erfindung eines solchen Zahlensystems gekommen ist. Der Vergleichung wegen wollen wir hier einige Systeme neben einander stellen:

Dyadik	*Triadik*	*Tetradik*	*Pentadik*	*Hexadik*	*Heptadik*	*Octadik*	*Enneadik*	*Decadik*	*Enneadecadik*	*Duodecadik*	&c.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	.
11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	.
100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	.
101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	.
110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	.
111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	.
1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	.
1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	.
1010	101	22	20	14	13	12	11	10	α	α	.
1011	102	23	21	15	14	13	12	11	10	β	.
1100	110	30	22	20	15	14	13	12	11	10	.

2) Die Frage, welches von allen Zahlensystemen wohl das beste sei, lassen wir dahin gestellt sein. Jedes ist practisch brauchbar. Uns muss aber schon aus dem haltbaren Grunde die Decadik das beste sein, weil es überall (?)

gebraucht wird, und wir danach zu schreiben einmal gewohnt sind. Uebrigens macht es auch nur die Ungewohntheit, wenn man nicht in allen Systemen gleich fertig schreiben und rechnen kann. — So viel ist indessen klar, je grösser die Grundzahl eines Zahlensystems, je grösser das dazu erforderliche Einmaleins, je schwerer, aber je schneller ist auch darnach zu rechnen und umgekehrt. Die Chinesen in ihrer Kindheit brauchten zu ihrer Dyadik gar kein Einmaleins.

3) Nichts ist leichter, als eine Zahl, welche in einem beliebigen System geschrieben ist, in ein anderes zu übersetzen. Soll z. E. die tetradisch gebildete Zahl 210232, decadisch geschrieben werden, so braucht man nur jede Ziffer mit dem Werth ihrer Einheit, d. h. so oft mit 4 zu multipliciren, als ihr Rang es angiebt. Die erste rechts stehende Ziffer ist vom 0ten Range und stellt also blosse Einheiten dar. die zweite Ziffer ist aber vom ersten Range, wo also jede Einheit 4 Einheiten in der Decadik gilt, die dritte Ziffer ist vom zweiten Range und jede Einheit gilt hier also 4.4 = 16. Mithin ist die tetradisch geschriebene Zahl 210232 decadisch ausgedrückt = 2350.

1024	256	64	16	4	1		
2	1	0	2	3	2	=	2 = 2
							3.4 = 12
							2.16 = 32
							0.64 = 0
							1.256 = 256
							2.1024 = 2048
							2350

Eben so findet man:

Dyadik *Decadik*
101011 = 43

32	16	8	4	2	1		
1	0	1	0	1	1	=	1 = 1
							1.2 = 2
							0.4 = 0
							1.8 = 8
							0.16 = 0
							1.32 = 32
							43

4) Soll umgekehrt eine decadisch gebildete Zahl, z B. 2350, in die Tetradik übertragen werden, so muss man die vorgegebene Zahl wiederholt durch die Grundzahl 4 dividiren; der erste Quotient giebt die Anzahl Einheiten vom ersten Range, und der erste Rest die Anzahl Einheiten vom 0ten Range; der zweite Quotient giebt die Anzahl Einheiten vom zweiten und der zweite Rest die vom ersten Range &c.; z. B.:

(1)		4	4	4	4	4
	2350	587	146	36	9	2
	2	3	2	0	1	2

(2)		2				
	43	21	10	5	2	1
	1	1	0	1	0	1

Also: 2350 in der Decadik = 210232 in der Tetradik
43 „ „ „ = 101011 „ „ Dyadik.

5) Der Mechanismus der vier Species ist in allen Systemen gleich. Bei der Addition in der Tetradik z B. braucht man nur für je vier Einheiten einer Reihe eine Einheit in die nächst folgende zu übertragen &c, wie folgende Beispiele zeigen:

	Dyadik.	*Tetradik.*	*Duodecadik.*
Addition:	10101001	301202	167β89α
	1111001	133112	β292α1
Summe:	100100010	1100320	25α8β7β

Subtraction:	100100010	1100320	25α8β7β
	1111001	301202	β292α1
Rest:	10101001	133112	167β89α
Multiplication:	10111	2302	9β0α
	1011	213	4β3
	10111	20112	25926
	10111	2302	91192
	101110	11210	33834
	11111101	1230132	40β9α46

Dyadik.

Division:

Divisor	Dividend	Quotient:
10111	11111101	1011
	10111	
	100010	
	10111	
	10111	
	10111	

Tetradik.

Divisor	Dividend	Quotient
2302	1230132	213
	11210	
	10313	
	2302	
	20112	
	20112	

6) Wenn eine Zahl nur mit zweierlei Ziffern geschrieben wird, so ist leicht zu erkennen, durch welche, mit denselben beiden Ziffern geschriebene, Zahlen sie theilbar ist. So sieht man z. B. gleich, dass die Zahl 95959595 durch 95 und 9595 theilbar ist. Weil nun in der Dyadik alle Zahlen (auch die bei der Subtraction darin entstehenden Reste), mit denselben beiden Ziffern 1 und 0 geschrieben werden, so begreift man, weshalb Leibnitz dieses System zur Entdeckung der Theilbarkeit der Zahlen geeigneter fand. Man sieht z. B., dass die Zahl 100100100100 durch 100, 1001, 10, 11 &c. theilbar sein muss. Wird also eine Zahl in die Dyadik übersetzt, so sind ihre Factoren leichter zu erkennen. So ist z. E. die Zahl 31393 dyadisch geschrieben = 111101101000001 und ein geübter Blick sieht nun sogleich, dass sie durch 111, = 7; 1101, = 13; 10001, = 17; 10011, = 19 theilbar ist. (S. Lambert's mathem. Schriften.)

313.

Zu § 10. Der in § 10 angeführte Satz: dass man die beiden Factoren eines Products mit einander verwechseln darf, lässt sich folgendermassen beweisen: Ob man den Factor b selbst oder jede darin enthaltene Einheit $a$mal setzt, das ist einerlei. Eben so ist es einerlei, ob man die Einheit $a$mal, oder a einmal nimmt, $a.1 = 1.a = a$. Setzt man nun jede in b enthaltene Einheit $a$mal, so hat man offenbar a selbst, $b$mal gesetzt. Es ist nämlich, wenn man b in Einheiten auflöst: $a.b = a(1+1+1+1+\ldots) = a+a+a+a+\ldots = b.a$.

Beispiel. $4.5 = 4.(1+1+1+1+1) = 4+4+4+4+4) = 5.4$

Dieser Satz ist ganz allgemein und lässt sich auf beliebig viele Factoren ausdehnen, indem man nach der sogenannten $n+1$ Methode von zwei Factoren auf drei, von drei auf vier schliesst &c. Es ist z. B. $a.bc = a.cb = bc.a = cb.a$, wo nach dem vorhergehenden Satz bloss zwei Factoren, erstlich b und c, dann bc und a verwechselt sind. Nun ist aber auch $ab.c = a.bc$; denn ob man c erst $b$mal und dann diese b gleichen Pöste wieder $a$mal, oder ob man c gleich abmal setzt, das ist einerlei, indem man in beiden Fällen ab gleiche Pöste (c) erhält. Eben so ist $bc.a = b.ca$, mithin $abc = acb = cab = cba = bac = bca$ &c.

314.

Zu § 24. 1) Die Zahlen 2 und 5 sind in 10, mithin $2.2 = 4$ und $5.5 = 25$ in $10.10 = 100$; $2.2.2 = 8$ und $5.5.5 = 125$ in 1000 ohne Rest enthalten. Um

nun zu beweisen, dass eine Zahl, z.B. 276, durch 2 theilbar sein muss, weil ihre letzte Ziffer es ist, denke man sich diese letzte Ziffer davon getrennt und die Zahl als eine zweitheilige geschrieben, nämlich $276=270+6=27.10+6$. Weil nun der letzte Theil 6 vermöge Voraussetzung und der erste Theil 27.10 wegen des Factors 10 durch 2 theilbar ist, so muss es auch die Summe $27.10+6=276$ sein (§ 21); weil $\frac{276}{2}=\frac{270+6}{2}=\frac{27.10}{2}+\frac{6}{2}=27.5+3$. Eben so ist der Beweis für 5; und für $2.2=4$; $2.2.2=8$ &c., wenn man die beiden letzten, drei letzten Ziffern &c. trennt. Weil z. E. die beiden letzten Ziffern der Zahl 1484 durch 4 theilbar sind, so ist es auch die ganze Zahl; denn

$$\frac{1484}{4}=\frac{1400+84}{4}=\frac{14.100}{4}+\frac{84}{4};\qquad \frac{675}{5}=\frac{670+5}{5}=\frac{67.10}{5}+\frac{5}{5}$$

2) Eine jede Zahl lässt sich immer so zerlegen, dass jede Ziffer mit einem Factor von so vielen 9 multiplicirt ist, als noch Ziffern folgen, und dass der eine Theil die Quersumme aller Ziffern ist; z. B.:

$$\begin{aligned}6453&=6.999+4.99+5.9+(6+4+5+3)\\&=6.999+4.99+5.9+18\end{aligned}$$

Es ist nämlich:

$$6453=6000+400+50+3=6.1000+4.100+5.10+3$$

ferner, da: $1000=999+1$; $100=99+1$ &c.

$$\begin{aligned}6000&=6(999+1)=6.999+6 \qquad (\S\ 19)\\400&=4(99+1)=4.99+4\\50&=5(9+1)=5.9+5\\3&=3=3\\\hline 6453&=6.999+4.99+5.9+18\end{aligned}$$

Ist also die Quersumme der Zahl 6453 durch 3 oder 9 theilbar, so sind es auch die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung und folglich auch die Zahl, als deren Summe:

$$\frac{6453}{9}=\frac{6.999+4.99+5.9+(6+4+5+3)}{9}$$

315.

Zu § 29. Nach der § 29 gegebenen Regel findet man 24 als den grössten gemeinschaftlichen Factor von 72 und 168.

168|72|24

h 36 k

a 72 b

72 72 24

c d e g

Dass nun die nach dieser Regel gefundene Zahl 24 wirklich ein gemeinschaftlicher Factor und zwar der möglichst grösste ist, ist am leichtesten einzusehen, wenn man die beiden Zahlen 72 und 168 durch Linien dargestellt denkt. Lässt man nämlich eine beliebig lange Linie die Einheit bedeuten, so stellt eine 72mal längere Linie ab die Zahl 72 und eben so cg die Zahl 168 dar. Ist nun (nachdem ab auf cg zweimal abgesetzt worden), der erste Rest $eg=24$, genaue mal in ab enthalten, so misst er auch cd, de und eg (sich selbst) und folglich auch $cg=168$. Ein grösseres Maass, wie etwa $hk=36$, welches genaue mal in ab folglich auch in cd und de enthalten wäre, kann nicht in der kleinern Linie eg und folglich auch nicht ohne Rest in $cg=168$ enthalten sein.

Im vorstehenden Beispiel ging die Division schon beim zweiten Male auf, die Schlüsse bleiben aber offenbar dieselben, wenn sie weiter fortgesetzt werden müssen

316.

Zu §§ 28, 52, 183.

Lehrsatz. Wenn p eine Primzahl und a und b zwei ganz beliebige Zahlen bedeuten, welche jedoch einzeln nicht durch p (ohne Rest) theilbar sind, so kann auch ihr Product $a.b$ nicht durch p theilbar sein.

1. Beweis. Wenn eine Zahl, a, durch eine Primzahl, p, ohne Rest theilbar ist, so muss die Zahl a, in ihre einfachen Factoren zerlegt, nothwendig den einfachen Factor p enthalten.

Wenn also zwei (oder auch mehrere) Zahlen, a, b, einzeln genommen durch eine Primzahl, p, nicht theilbar sind, so kann es auch ihr Product $a.b$ nicht sein. Denn da in diesem Falle weder a noch b, in einfache Factoren zerlegt, den Primfactor p enthält, so kann auch die Multiplication ihrer Primfactoren unmöglich den Primfactor p in ihr Product hineinbringen, weil aus der Multiplication mehrer Primzahlen immer eine zusammengesetzte Zahl entsteht. Hieraus folgt ferner (weil eine zusammengesetzte Zahl, a, gleich dem Product aus allen ihren Primzahlen ist), dass eine Zahl, a, nicht auf verschiedene Weise in Primzahlen zerlegt werden kann.

2. Beweis. Sind beide Factoren a und b grösser als p, so dividire man erst einen von ihnen, b durch p, bezeichne den ganzen Quotienten mit m und den Rest, der nothwendig kleiner als p ist, mit r. Es sei nämlich $\frac{b}{p} = m + \frac{r}{p}$ oder:

$$b = mp + r$$

und folglich (auf beiden Seiten mit $\frac{a}{p}$ multiplicirt):

$$\frac{ab}{p} = ma + \frac{ar}{p} \text{...............} (1)$$

Könnte nun $a.b$, durch p theilbar, mithin $\frac{ab}{p}$ eine ganze Zahl sein, so müsste, weil ma eine ganze Zahl ist, nothwendig auch $\frac{ar}{p}$ eine ganze Zahl, mithin ar durch p theilbar sein. Um die Unmöglichkeit zu zeigen, dividire jetzt p durch r, setze den ganzen Quotienten $= m'$ und den Rest $= r'$. Es sei nämlich:

$$p = m'r + r'$$

folglich (mit $\frac{a}{p}$ multiplicirt):

$$a = m'\frac{ar}{p} + \frac{ar'}{p}$$

Wäre nun ar durch p theilbar, mithin $\frac{m'ar}{p}$ eine ganze Zahl, so müsste nothwendig auch $\frac{ar'}{p}$ eine ganze Zahl sein, weil der Betrag der rechten Seite gleich einer ganzen Zahl a sein muss.

Dass aber auch ar' nicht durch p theilbar sein kann, wird eben so wie von ar bewiesen, indem man p durch r' dividirt, den Quotienten mit m'' und den Rest mit r'' bezeichnet &c. Man sieht also, dass durch Wiederholung dieses Schlusses der jedesmal bleibende Rest r, r', r'', r'''... von welchen keiner in p (weil p eine Primzahl) enthalten ist, immer kleiner und zuletzt $= 1$ werden muss. Wäre also ab durch p theilbar, so müsste auch ar, ar', ar''......$a.1$, mithin a selbst durch p theilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Ist keiner der drei Factoren a, b, c durch die Primzahl p theilbar, so ist es auch ihr Product abc nicht. Denn nach dem Vorhergehenden ist es $a.b$ nicht und wenn man $ab = A$ setzt, auch $A.c = abc$ nicht &c. Dieser für die Arithmetik wichtige Lehrsatz giebt den Schlüssel zu vielen andern.

317.

Zu § 32. Nach dem vorhergehenden § ist, ausser 5 und 2, keine Primzahl, wie 3, 7 &c., also auch kein Vielfaches derselben, wie 2.3, 4.7 &c., kurz keine Zahl, die sich nicht in lauter Factoren 2 und 5 auflösen lässt, in 10, also auch nicht in 10.10 oder 100, 1000 &c. ohne Rest enthalten. Daraus folgt also, dass kein Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen gegen einander sind, genau durch einen Decimalbruch dargestellt werden kann, wenn sein Nenner sich nicht in lauter Factoren, wie 2 und 5, auflösen lässt. Dass dann aber die Decimalen immer in derselben Folge (periodisch) wiederkehren müssen, ist leicht zu begreifen. Verwandelt man z. E. den Bruch $\frac{1}{7}$ in einen Decimalbruch, indem man mit 7 in 1000... dividirt, so ist klar, dass, da keiner von den auf einander folgenden Resten 7 sein kann, eine von den 6 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Rest kommen muss, höchstens können also nur sechs verschiedene Reste Statt finden, dann muss nothwendig einer derselben zum zweiten Male und somit auch dieselben Decimalen wiederkehren. Was aber von $\frac{1}{7}$ gilt, gilt auch von jedem Vielfachen desselben $\frac{2}{7} = 2.\frac{1}{7}$ &c. So ist z. B.:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142\ldots..$$
$$\frac{3}{7} = 3.\frac{1}{7} = 3(0{,}14285714..) = 0{,}42857142\ldots$$

Man sieht sogleich, dass wegen der höchstmöglichen Anzahl Reste die Perioden der Decimalbrüche mindestens eine Ziffer weniger haben müssen, als der Nenner des sie erzeugenden Bruches Einheiten hat. Um aber aus einem gegebenen Nenner im Voraus die Anzahl der periodischen Decimalen bestimmen zu können, muss man sich mit dem § 167 angeführten merkwürdigen und lehrreichen Werke vertraut machen. So giebt z. B. jeder Bruch von der Form $\frac{1}{10^n - 1}$, n periodische Decimalen, nämlich:

$$\frac{1}{10^1 - 1} = \frac{1}{9} = 0{,}111..,\ \frac{1}{10^2 - 1} = \frac{1}{100 - 1} = \frac{1}{99} = 0{,}0101..\ \&c.$$

318.

Ist ein periodischer Decimalbruch gegeben, so kann man leicht den gewöhnlichen Bruch finden, aus welchem jener entstanden ist. Man setze nämlich den periodischen Bruch $= s$ und multiplicire diese Gleichung mit einer solchen Rangzahl, dass die Perioden über einander zu stehen kommen, und subtrahire alsdann die erste Gleichung von der zweiten, so werden die über einander stehenden gleichen Perioden getilgt und man erhält eine endliche Grösse. So findet man z. B.:

$$0{,}1515\ldots = \frac{5}{33};\qquad 0{,}321321\ldots = \frac{107}{333};$$

$$s = 0{,}1515\ldots\qquad s = 0{,}321321\ldots$$
$$100s = 15{,}1515\ldots.\qquad 1000s = 321{,}321321\ldots.$$
$$99s = 15\qquad 999s = 321$$
$$s = \frac{15}{99} = \frac{5}{33};\qquad s = \frac{321}{999} = \frac{107}{333}.$$

Fängt die Periode nicht gleich hinter dem Decimalzeichen an, so muss man letzteres erst so weit vorrücken; z. B.:

$s = 0.2530030\ldots$	$s = 2.64242\ldots$
$100s = 25,300300\ldots$	$10s = 26,4242\ldots$
$100000s = 25300,300300\ldots$	$1000s = 2642,4242\ldots$
$99900s = 25275$	$990s = 2616$
$s = \frac{25275}{99900} = \frac{337}{1332};$	$s = \frac{2616}{990} = \frac{436}{165}$

319.

Zu § 183. Keine Potenz eines auf seine kürzeste Form gebrachten Bruches, wie z. B. $\frac{9}{4}$, kann eine reine ganze Zahl geben; denn löst man den Nenner in einfache Factoren auf, $\frac{9}{4} = \frac{9}{2.2}$, so sieht man, dass, wenn nicht der Zähler 9, also auch nach § 316 keine Potenz desselben, wie 9.9, 9.9.9 &c., durch die Primzahl 2 ohne Rest theilbar ist, auch durch kein Vielfaches von 2, wie 2.2 = 4 &c.. theilbar sein kann.

Ist also die *nte* Wurzel aus einer ganzen Zahl N nicht in ganzen Zahlen möglich, so kann sie, dem strengen Begriffe nach, auch durch keinen Bruch genau dargestellt werden. Denn wäre ein solcher Bruch $\frac{a}{b}$ denkbar, so müsste ja $\sqrt[n]{N} = \frac{a}{b}$ und mithin $\left(\frac{a}{b}\right)^n = N$ sein, d. h. es müsste der Bruch $\frac{a}{b}$, *n* mal mit sich selbst multiplicirt, eine reine ganze Zahl N geben, was nach § 316 unmöglich ist. Die Decimalen der irrationalen Wurzel müssen folglich ohne Aufhören und wegen § 318 ohne Perioden in's Unendliche fortlaufen.

320.

Theorie des Positiven und Negativen.

Zum zehnten Buche.

Wir müssen hier zuvor bemerken, dass die Theorie der Gleichungen zuerst auf den Begriff der entgegengesetzten Grössen geführt hat, und dass die Regeln, wie man mit denselben rechnen muss, ebenfalls durch Anwendung der Gleichungen auf wirkliche Fälle gefunden sind. Erst später wurde zur Bestätigung und richtigern Erklärung diese, schon durch die Gleichungen kennen gelernte Theorie des sogenannten Positiven und Negativen, auch unabhängig von den Gleichungen, aus dem blossen Begriffe des Gegensatzes abgeleitet. Der Natur der Sache nach muss aber diese so abgeleitete Theorie höchst abstract werden und erkünstelt scheinen. Vollkommene Klarheit kann sie erst nach und nach durch verschiedene practische Erläuterungen erlangen, und dass daher dieser § von einem Anfänger schon vollkommen verstanden werden sollte, ist unmöglich, aber auch (zur Aufmunterung gesagt) gar nicht nothwendig. Denn die Richtigkeit der hier aus dem blossen Begriffe des Gegensatzes abgeleiteten Regeln folgt ganz von selbst und auf die anschaulichste Weise aus dem, was über Gleichungen gesagt ist, und man braucht daher diesen § nur vergleichungsweise zu lesen.

1. Addition. Fassen wir den Begriff der Addition in grösserer Allgemeinheit als die Vereinigung mehrerer zusammengehöriger Theile zu einem Ganzen, bei dessen Bildung man auf die Einstimmigkeit und den Widerstreit seiner Theile Rücksicht nehmen muss, so ist klar, dass, wenn alle Theile einstimmig sind, die Summe in demselben Sinne, wie die einzelnen Theile, genommen werden und also dasselbe Vorzeichen haben muss. Sind aber die einzelnen Theile widerstreitend, so muss man die Summe der positiven, und eben so die der negativen

Theile besonders suchen, dann die kleinere Summe durch einen eben so grossen Theil der grössern tilgen und das Uebrigbleibende im Sinne der grössern Summe, also mit dem ihm wesentlich zukommenden Vorzeichen nehmen. Dass man eine solche übrig gebliebene Grösse obgleich sie im engern Sinne ein wirklicher Rest ist, dennoch als den wirklichen Betrag aller Theile, kurzweg Summe, oder, bestimmter gesprochen algebraische Summe, so wie das Zusammenrechnen der Theile, obgleich dabei ein wirkliches Subtrahiren Statt findet, addiren oder algebraisch addiren nennt, und, dem allgemeinen Begriff zufolge, nennen muss, kann keine Dunkelheit verursachen Man merke sich noch, dass der Satz: das Ganze ist grösser als jeder seiner Theile, nur für einstimmige Grössen gilt.

2. *Subtraction.* Durch mancherlei Umstände, und namentlich durch die Stellung einer Aufgabe, so wie durch das Umformen der Gleichungen &c. veranlasst, können Fälle vorkommen, wo man entgegengesetzte Grössen von einander subtrahiren muss, oder wo der Subtrahendus grösser ist, als der mit ihm einstimmige Minuendus, und wo also die Subtraction im engern Sinne, als eine wirkliche Wegnahme des Subtrahendus vom Minuendus, völlig unmöglich wäre, indem man unmittelbar nur eine kleinere Grösse von einer einstimmigen grössern subtrahiren kann. Um aber dennoch den Gang der Rechnung nicht aufzuhalten und alle vorkommende Fälle, der Forderung gemäss, folgerecht zu behandeln, richtig zu deuten, und die nach dem engeren Begriff der Subtraction etwa Statt findenden Ungereimtheiten zu heben, brauchen wir diesen Begriff nur im allgemeinern Sinn zu nehmen, nämlich subtrahiren heisst: diejenige Grösse finden, um welche der Subtrahendus vom Minuendus verschieden ist, d. h. die Grösse, welche mit dem Subtrahendus vereinigt, den Minuendus giebt. Diese Grösse ist dann der gesuchte wirkliche Unterschied (algebraische Differenz), und man erhält sie offenbar, wenn man das Vorzeichen des Subtrahendus umkehrt und ihn dann zum Minuendus (algebraisch) addirt. Diese leicht zu behaltende Regel ist ganz allgemein, wie folgende Beispiele, welche alle verschiedene Fälle darstellen, zeigen:

Minuend.	+8	−8	−8	+8	+2	−2	−2	+2
Subtrah.	+2	−2	+2	−2	+8	−8	+8	−8
	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)
Differenz:	+6	−6	−10	+10	−6	+6	−10	+10

Dass die gefundenen Differenzen (eben weil sie aus zwei Theilen, dem Minuendus und dem Umgekehrten, dem Subtrahendus, zusammengesetzt sind), zu den Subtrahendus addirt, die Minuendus nothwendig wiedergeben müssen, ist klar. Es ist also ganz einerlei, ob man eine Grösse subtrahirt oder mit umgekehrtem Zeichen addirt. Durch Hülfe der Gleichungen kann man die Richtigkeit dieser Regel auch folgendermaassen anschaulich machen: Man denke sich nämlich den Subtrahendus einmal so wie er ist, und einmal mit umgekehrtem Zeichen zum Minuendus gelegt, so ist dadurch nur die Form, aber nicht die Grösse des Minuendus geändert, und wenn man alsdann von dem so umgeformten Minuendus den Theil weglässt (subtrahirt), welcher dem Subtrahendus gleich ist, so muss der wahre Unterschied bleiben. Es ist z. E. (vergl. § 128):

Minuend.	+ 8	=	+8 − 2 + 2
Subtrah.	− 2	=	− 2
	(+)		
Differenz:	10	=	+8 + 2

Nimmt man nämlich auf der rechten Seite − 2 (zwei negative Einheiten) weg, so muss man auf der linken Seite +2 zulegen, weil sonst die Gleichheit gestört sein würde. Eben so ist:

	$-8=-8+2-2$		$-2=-2-8+8$
subtr.	$+2= \quad +2$	subtr.	$-8= \quad -8$
	$(-)$		$(+)$
	$-10=-8-2$		$+6=-2+8$

3. Multiplication. Die Regel über den Einfluss der Vorzeichen bei der Multiplication entgegengesetzter Grössen lässt sich leicht aus dem Begriff des Gegensatzes ableiten. Haben beide Factoren einerlei Vorzeichen, so ist das Product allemal positiv, negativ aber, wenn die Factoren verschiedene Vorzeichen haben. Mit anderen Worten: gleiche Zeichen geben plus, ungleiche Zeichen geben minus.

Eigentlich braucht hier bloss der Fall erörtert zu werden, wo der Multiplicator eine inverse (negative) Grösse ist. Der Multiplicator ohne Vorzeichen gedacht, sagt bloss wie oft, sein Vorzeichen aber, in welchem Sinn der Multiplicandus gesetzt werden soll. Nimmt man eine directe (positive) Grösse invers, so wird sie invers, z. B. $+8$ einmal invers genommen, giebt -8; $+8$ zweimal invers genommen, giebt -16 &c., daher $-1.+8=-8$; $-2.8=-16$ &c. Nimmt man eine schon an sich inverse Grösse wieder im umgekehrten Sinne, also das Inverse invers, so wird sie wieder direct, z. B -8 einmal umgekehrt (invers) genommen, giebt $+8$, zweimal invers genommen $+16$ &c., nämlich $-1.-8=+8$; $-2.-8=16$ &c. Nimmt man aber eine inverse Grösse einmal wie sie ist, also nicht umgekehrt, so erhält man die Grösse selbst; zweimal genommen, das Doppelte &c., nämlich $1.-8$ oder $+1.-8=-8$; $2.-8$ oder $+2.-8=-16$. Eben so ist $2.+8$ oder $+2.+8=+16$ &c. In den beiden letzten Fällen braucht man dem Vorzeichen (+) des Multiplicators eigentlich keine besondere Bedeutung unterzulegen, indem er hier ohne Vorzeichen, d. h. ohne andere Beziehung, als blosse Multiplicationszahl gebraucht werden kann.

Beispiele:

Multiplicand.	$+9$	-9	$+9$	-9
Multiplicator	$+3$	$+3$	-3	-3
Prod.	27	-27	-27	$+27$

Anmerkung. Man kann alle Fälle, welche bei der Multiplication vorkommen können, wo nämlich die Factoren ganze, gebrochene, positive und negative Zahlen sind, in folgendem allgemeinen Begriff zusammenfassen: multipliciren heisst, mit einer Grösse, dem Multiplicandus, eben so verfahren, wie man mit der Einheit verfuhr, als man den Multiplicator daraus bildete.*) In $\frac{3}{4}.\frac{5}{7}$ wurde zur Bildung des Multiplicators $\frac{3}{4}$, der vierte Theil der Einheit 3mal genommen, folglich muss auch der vierte Theil von $\frac{5}{7}$, nämlich $\frac{5}{28}$, 3mal genommen werden; daher $\frac{3}{4}.\frac{5}{7}=3.\frac{5}{28}=\frac{15}{28}$. In -3.8 wurde die Einheit zur Bildung des Multiplicators dreimal invers gesetzt, folglich muss auch 8 dreimal invers genommen werden, daher $-3.8=-8-8-8=-24$. Eben so ist $-3.-8=+8+8+8=24$; $3.-4=-4-4-4=-12$ &c.

4. Division. Die Regel für die Division entgegengesetzter Grössen folgt von selbst aus der für die Multiplication, auch lautet sie ebenso: haben Dividend und Divisor gleiche Zeichen, so ist der Quotient positiv, negativ aber, wenn Dividend und Divisor ungleiche Vorzeichen haben. Mit andern Worten: gleiche Zeichen geben plus, ungleiche geben minus. Der Quotient muss nämlich so beschaffen sein, dass er, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus wiedergiebt. So ist z. B.:

---

*) Diese Erklärung findet sich in Thibaut's Arithmetik und in Cauchy's Cours d'Analyse. Sie passt aber nicht auf irrationale und imaginaire Grössen.

$\frac{+8}{+2} = +4$; weil $+4 \cdot +2 = +8$

$\frac{+8}{-2} = -4$; weil $-4 \cdot -2 = +8$

$\frac{-8}{+2} = -4$; weil $-4 \cdot +2 = -8$

$\frac{-8}{-2} = +4$; weil $+4 \cdot -2 = -8$

321.

Zu § 144. Aus der Multiplication zweier vieltheiligen Grössen ergiebt sich ganz von selbst noch ein anderes Verfahren, nach welchem man die Division zweier vieltheiligen Grössen oftmals leichter bewirken kann, als durch die § 144 gezeigte Factorenzerlegung. Multiplicirt man z. B. $5ac - \frac{2}{3}bc$ mit $7ax + \frac{4}{5}bx$, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} 5ac - \frac{2}{3}bc \\ 7ax + \frac{4}{5}bx \end{array}\right\} \text{Factoren}$$

$$\begin{array}{l} 35a^2cx - \frac{14}{3}abcx \\ \qquad\qquad + 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx \\ \hline 35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx \end{array}$$

so ist klar, dass das erhaltene Product durch jeden der beiden Factoren theilbar sein muss.

Wäre nun umgekehrt die Aufgabe gegeben: die Grösse: $35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx$ (deren Ursprung wir jetzt nicht wissen wollen), durch $5ac - \frac{2}{3}bc$ zu dividiren, so ist einleuchtend, dass (weil der Dividendus mehr Glieder. als der Divisor enthält) der etwa mögliche Quotient nothwendig vieltheilig sein, und dass eins seiner Theile so beschaffen sein muss, dass er, mit dem ganzen Divisor multiplicirt, ein Product giebt, von welchem wenigstens ein Glied einem Gliede des Dividendus gleich ist. Hierdurch ist also die Regel, nach welcher man verfahren muss, um den etwa möglichen Quotienten zu finden, gegeben: Man dividire nämlich mit einem Theil des Divisors, z. B. mit dem 1sten ($5ac$) in einen dazu passenden Theil des Dividendus, z. B. in den 1sten ($35a^2cx$), setze den Quotienten $\left(\frac{35a^2cx}{5ac} = 7ax\right)$ als den einen Theil des gesuchten Quotienten, multiplicire mit ihm den ganzen Divisor und subtrahire das Product vom Dividendus. Dasselbe Verfahren auf das übrig gebliebene Stück des Dividendus angewandt, giebt den 2ten Theil des Quotienten &c., wie folgendes Beispiel zeigt:

$$5ac - \tfrac{2}{3}bc \left| \begin{array}{l} 35a^2cx - \frac{2}{3}abcx - \frac{8}{15}b^2cx \\ 35a^2cx - \frac{14}{3}abcx \\ \hline \qquad\qquad 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx \\ \qquad\qquad 4abcx - \frac{8}{15}b^2cx \end{array} \right| = 7ax + \tfrac{4}{5}bx$$

Es ist nämlich, indem man das erste Mal mit $5ac$ in $35a^2cx$ dividirt, der Quotient $= \frac{35a^2cx}{5ac} = 7ax$. Im ersten Gliede des Restes ist $5ac$ offenbar $\frac{4abcx}{5ac} = \frac{4}{5}bx$ mal enthalten.

Anmerkung 1. Hätte man, statt in das 1ste Glied, in das 2te oder 3te Glied des Dividendus mit $5ac$ dividiren wollen, so würde der entstandene Quotient

mit einem Bruche behaftet gewesen, mithin nicht so einfach ausgefallen sein. Hieraus folgt nun, dass die Ordnung der Glieder des Dividendus nicht gleichgültig ist. Man muss nämlich sowohl Dividendus als Divisor immer erst so ordnen, dass die Glieder in beiden entweder nach steigenden oder fallenden Potenzen einer und derselben Buchstabengrösse fortschreiten. Die Nothwendigkeit dieser Ordnung folgt aus der Multiplication zweier so geordneten Factoren.

Im vorstehenden Beispiele waren Dividend und Divisor nach den fallenden Potenzen von a geordnet, nämlich: a^3, a^2, a^1 im Dividendus und a^1, a^0 im Divisor, oder auch nach steigenden Potenzen von b, nämlich: b^0, b^1, b^2. Zur Uebung vollziehe man folgende angedeutete Divisionen:

$$\frac{a^2-b^2-ac+bc}{a-b}=a+b-c$$

$$\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x^2-x-6}=x^2-1$$

$$\frac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x+1}=x^3-2x^2-5x+6$$

$$\frac{x^2+ax+b}{x+a}=x+\frac{b}{x+a}$$

2. Zufolge §§ 254, 256 ist die Summe der geometrischen Reihe:

$$a^{n-1}+a^{n-2}.x+a^{n-3}.x^2+a^{n-4}.x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}$$

in welcher a^{n-1} das erste, x^{n-1} das letzte Glied und $\frac{x}{a}$ der Exponent ist, $=\frac{x^n-a^n}{x-a}$. Dies führt unmittelbar auf den Satz: dass ein jeder Grössenausdruck von der Form x^n-a^n allemal durch die Grösse $x-a$ ohne Rest theilbar sein muss, was auch n für eine ganze Zahl sein möge. Man hat z. B. nach der eben gezeigten Divisionsregel:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

3. Die Grösse a^n-b^n ist auch durch $a+b$ ohne Rest theilbar, wenn n eine grade Zahl ist, sonst nicht. Die Grösse a^n+b^n ist auch durch $a+b$ theilbar, wenn n eine ungrade Zahl ist, sonst nicht.

322.

Von den Proportionen &c. Wenn zwei Grössen a und b dasselbe Verhältniss zu einander haben, wie zwei andere Grössen c und d, mithin a durch b und c durch d dividirt, einerlei Quotienten geben, so kann man aus diesen beiden gleichen Verhältnissen, welche man als zwei gleichgeltende Brüche betrachten kann, folgende Gleichung bilden:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei gleichen Verhältnissen heisst in der alten Kunstsprache eine Proportion und pflegt man dieselbe, statt wie oben, auch so zu schreiben: *)

$$a:b=c:d$$

Man liest: a verhält sich zu b, wie c zu d, d h. a ist eben so oft in b enthalten, als c in d. Die Grösse a heisst hier das 1ste, b das 2te, c das 3te und d das 4te Glied; ferner a und d die beiden äussern, b und c die beiden mittlern Glieder der Proportion. Es verhält sich z. B. 2 eben so zu 4, wie 3 zu 6 und die vier Zahlen 2, 4; 3, 6 geben daher folgende Proportion, $2:4=3:6$ oder $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$.

Sind die beiden mittlern Glieder einander gleich, wie in $a:b=b:d$, so heisst die Proportion eine stetige und die Grösse b heisst dann die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen den beiden äussern Gliedern a und d. Es verhält sich z. B. 3 eben so zu 6, wie 6 zu 12, und diese Zahlen 3, 6; 6, 12 bilden daher die stetige Proportion $3:6=6:12$, wo also 6 die mittlere Proportionale zwischen 3 und 12 ist.

Sind die vier Glieder einer Proportion unbenannte oder gleichbenannte Zahlen, so können aus derselben mehrere kleine Folgerungen gezogen werden, worüber man sich, weil dieselben (namentlich in der Geometrie) Anwendung finden, folgende Sätze merken möge:

In jeder Proportion ist das Product der beiden mittlern Glieder gleich dem Product der beiden äussern Glieder. In Zeichen:

wenn $a:b=c:d$: $\quad 3:6=2:4$;
so ist auch $ad=bc$, $\quad 3.4=6.2$.

Beweis. Aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt, auf beiden Seiten mit bd multiplicirt: $ad=bc$.

Ist also ein Glied in einer Proportion unbekannt, so kann man dasselbe leicht berechnen. Frägt man z. B., wie gross x sein muss, damit folgende Proportion $3:5=9:x$ Statt findet, so hat man, vermöge des eben erklärten Satzes, dass das Product der äussern Glieder dem Product der mittlern gleich sein muss: $3x=5.9$, mithin $x=\frac{5.9}{3}=15$. Wäre:

$3:x=9:15$; so ist $9x=45$ und $x=5$;
$x:5=9:15$; so ist $15x=45$ und $x=3$;
$a:x=b:c$; so ist $bx=ac$ und $x=\frac{ac}{b}$.

Hiernach findet man auch die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Grössen, wenn man aus dem Product derselben die Quadratwurzel zieht.

*) Unser sel. Lehrer *Thibaut* erklärte mit Recht die ganze Lehre von den Proportionen und namentlich diese undeutliche Schreibart $a:b=c:d$ für eine schädliche. Wir haben sie deshalb auch in den Anhang verwiesen. Viele Mathematiker schreiben schon lange die Proportion in der vorstehenden deutlicheren Form einer Gleichung, nämlich: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Sucht man z. B. zu 3 und 12; 5 und 2; a und b die mittlere Proportionale, so hat man:

$$3:x=x:12, \text{ woraus } x^2=36, \text{ mithin } x=\pm 6$$

$$5:x=x:2; \quad \text{"} \quad x^2=10 \quad \text{"} \quad x=\sqrt{10}=\pm 3{,}162\ldots$$

$$a:x=x:b; \quad \text{"} \quad x^2=ab, \quad \text{"} \quad x=\sqrt{ab}.$$

Die Aufgabe, **eine Grösse a in stetige Proportion zu theilen,** verlangt: a in zwei solche Theile zu zerlegen, dass sich der kleinere Theil zum grössern verhält, wie der grössere zur ganzen Grösse. (Siehe § 227.)

2) **In jeder Proportion kann man die Glieder der Verhältnisse umkehren.** Ist nämlich:

$$a:b=c:d; \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \quad 15:3=20:4;$$

so ist auch $b:a=d:c$; $\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; $\quad 3:15=4:20$.

3) **In jeder Proportion verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten.** Ist nämlich:

$$a:b=c:d; \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \quad 3:6=9:18$$

so ist auch: $a:c=b:d$; $\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\quad 3:9=6:18$

4) **In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten Gliede.** In Zeichen, wenn:

$$a:b=c:d; \qquad 8:2=12:3;$$

so ist $a\pm b:a=c\pm d:c$; $\qquad 10:2=15:3$;

$$a\pm b:b=c\pm d:d; \qquad 6:2=9:3.$$

Beweis. Aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1 \qquad \text{oder } \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};$$

ferner: $\frac{b}{a}\pm 1=\frac{d}{c}\pm 1 \qquad$ oder $\frac{b\pm a}{a}=\frac{d\pm c}{c}$;

$$\text{oder } \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}.$$

323.

Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten eben so, wie jedes erste Glied zum zweiten. In Zeichen, wenn

$$A:a=B:b=C:c=E:e \text{ \&c.}$$

so ist auch $A+B+C+D+E\ldots:a+b+c+d+e\ldots=A:a=B:b$ &c.

Beweis. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Exponenten der gleichen Verhältnisse durch e, d. i. die Zahl, welche angiebt, wie viel Mal jedes vorhergehende Glied grösser oder kleiner ist, als das folgende, so hat man aus der nachstehenden ersten Reihe Gleichungen die zweite und daraus durch Addition die dritte, nämlich:

$$\frac{A}{a} = e; \qquad A = ae;$$

$$\frac{B}{b} = e; \qquad B = be;$$

$$\frac{C}{c} = e; \qquad C = ce;$$

$$\frac{D}{d} = e; \qquad D = de;$$

$$A + B + C + D + . + \ldots = ae + be + ce + de \ldots$$

$$A + B + C + D + . + \ldots = (a + b + c + d + \ldots)e$$

$$\frac{A + B + C + D + \ldots}{a + b + c + d + . \; .} = e = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} \text{ \&c.}$$

Wenn also mehrere Brüche einander gleich sind, so ist auch jeder dem Bruche gleich, dessen Zähler und Nenner aus der Summe jener Zähler und Nenner gebildet ist. Es ist z. B.:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \frac{6}{9} = \frac{2 + 8 + 4 + 14 + 6}{3 + 12 + 6 + 21 + 9} = \frac{34}{51}.$$

324.

Zu § 214. Hätte man aus einem vieltheiligen Grössenausdruck eine Quadratwurzel zu ziehen, so müsste man, wie sich aus der Bildung eines Quadrats ergiebt, ganz nach derselben Regel verfahren, nach welcher man die Quadratwurzel aus einer Zahl zieht, d. h. nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ (§ 191). Dasselbe gilt von der Cubicwurzel. So findet man z. B.:

$$\sqrt{(4x^4 - 12ax^3 + 29a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4)} = \pm(\overbrace{\underset{a}{2x^2} - \underset{b}{3ax}}^{a} + \underset{b}{5a^2})$$

$$a^2 = \underline{4x^4}$$

$$(\underset{2a}{4x^2} - \underset{b}{3ax}) - 12ax^3 + 29a^2x^2$$

$$2ab + b^2 = \underline{-12ax^3 + 9a^2x^2}$$

$$(\underset{2a}{4x^2 - 6ax}, \underset{b}{5a^2}) \; 20a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4$$

$$2ab + b^2 = \underline{20a^2x^2 - 30a^3x + 25a^4}$$

325.

Zu § 216. Alle Grössenausdrücke, wie $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a}$; $\sqrt[4]{-a}$, wo sich nämlich das Wurzelzeichen mit g r a d e m E x p o n e n t e n vor eine n e g a t i v e

Zahl stellt, und die selbst schon in den Elementen vorkommen, aber namentlich erst in der höhern Mathematik grössere Wichtigkeit erhalten, indem sie dort Rechnungen, die ohne ihren Gebrauch sehr mühsam und verwickelt werden müssten, ungemein vereinfachen, nennen einige Mathematiker unmögliche Grössen, andere, welche diese Benennung unpassend finden, indem nur keine wirkliche Wurzelausziehung in bestimmten Zahlen möglich ist, die Grössen selbst aber vorhanden und mithin möglich sind, nennen sie eingebildete (imaginaire) Grössen, im Gegensatz der übrigen sogenannten reellen Grössen, d. h. solche, die in bestimmten Zahlen ganz genau oder doch näherungsweise ausgedrückt werden können, wie z. B. $\sqrt{9}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-7}$ &c.

Die Benennung unmögliche Grössen ist allerdings unpassend, indem die Grössen selbst nicht unmöglich sind, wie etwa ein dreieckiger Kreis, ein rundes Dreieck, ein hölzernes Eisen. Die Benennung imaginaire Grössen ist aber um nichts besser. Denn eingebildet heisst doch, was nur in Gedanken und nicht in der Wirklichkeit Statt findet, z. B. ein Luftschloss. Da nun aber die Praxis auf mehr besagte Grössen führt, sie also nicht bloss in Gedanken, sondern wirklich vorkommen, so ist auch dieser letztgerügte Ausdruck unpassend. Die Ausflucht, das Wort imaginair nicht auf die fraglichen Grössen selbst, sondern nur auf die Wurzel-Ausziehung in bestimmten Zahlen zu beziehen, wird auch Niemand gelten lassen, der nicht die Fähigkeit hat, sich einen viereckigen Kreis und dergleichen einbilden zu können, denn mit eben der Fähigkeit müsste doch die Wurzel in Zahlen imaginirt werden.

Soll diese neue Art Grösse einen eigenthümlichen Namen haben, so ist die von *Gauss* gewählte Benennung: laterale Grösse, sehr passend, indem diese Sinn und Bedeutung hat.*)

Für die Elemente aber genügt es vollkommen, diese lateralen Grössen für blosse Rechnungsresultate (symbolische Grössenausdrücke) zu nehmen. Denn ohne dass sie einen eigenthümlichen Namen haben, kann man doch mit ihnen eben so gut und ganz nach denselben Regeln, wie mit den sogenannten reellen Grössen rechnen. Die Rechnung mit lateralen Grössen wird erleichtert, wenn man die negative Grösse unter dem Wurzelzeichen zuvor in zwei Factoren zerlegt, wovon der eine Factor die Grösse selbst, aber mit umgekehrtem Vorzeichen, und der andere Factor -1 ist, und alsdann die Wurzel aus jedem Factor besonders andeutet. (§ 211).

So ist z. B. $-4 = 4(-1)$; daher:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1}; \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = 3\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}; \qquad \sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$$

Jede laterale Grösse kann also immer als ein Product aus zwei Factoren, wovon der eine eine reelle Grösse und der andere $\sqrt{-1}$ ist, dargestellt werden, und man braucht sich daher nur zu merken, wie mit der einfachen Grösse $\sqrt{-1}$, welche man als eine besondere Art Einheit betrachten kann, gerechnet wird, um mit jedem Vielfachen derselben, so wie mit allen Grössenausdrücken, welche aus reellen und lateralen Grössen zusammengesetzt sind, rechnen zu können.

Die laterale Grösse $\sqrt{-1}$ pflegt Gauss der Kürze wegen mit i zu bezeichnen, und also $\pm\sqrt{-1} = \pm i$ zu setzen.

Man merke sich zuvor die graden und ungraden Potenzen von $\sqrt{-1}$, wonach sich alles Andere von selbst ergiebt. Man hat:

---

*) Mehr hierüber sehe man in der Analysis im Anhang.

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = -1; \quad \text{(§ 216, Anmerk.)}$$

oder $$(\sqrt{-1})^2 = [(-1)^{\frac{1}{2}}]^2 = (-1)^1 = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = (-1)\sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1;$$

oder $$(\sqrt{-1})^4 = [(-1)^{\frac{1}{2}}]^4 = (-1)^2 = 1;$$

$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \cdot \sqrt{-1} = 1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

Man sieht also, dass von $\sqrt{-1}$ die erste Potenz $= \sqrt{-1}$; die 2te, $= -1$; die 3te, $= -\sqrt{-1}$; **die 4te, $= 1$; von wo an sich dieselben Resultate wiederholen. Bedeutet also n eine beliebige ganze Zahl, 0 und 1 nicht ausgenommen, so ist allgemein:**

$$(\sqrt{-1})^{4n} = 1; \qquad i^{4n} = 1;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+2} = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = \sqrt{-1}; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}; \qquad i^{4n+3} = -i.$$

326.

Beispiele:

1) $$\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = 2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{-a} + \sqrt{-b} - \sqrt{-c} = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{-1};$$

$$a\sqrt{-4} - \sqrt{-a^2} = 2a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}.$$

2) $$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}\,\sqrt{-1} = -\sqrt{ab}; \quad \text{(§ 216.)}$$

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} = -\sqrt{36} = -6. \quad \text{(§ 216, Anmerk.)}$$

a) **Jeder aus reellen und lateralen Grössen zusammengesetzte Ausdruck** heisst eine c o m p l e x e G r ö s s e. Eine solche ist z. E. $2+3\sqrt{-1}$. **Bezeichnet man den reellen Theil allgemein durch a und den Factor von $\sqrt{-1}$ durch b, so** kann jede complexe Grösse immer auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ **oder $a + bi$ gebracht** werden. **Beispiele:**

3) $4+6\sqrt{-1}+\sqrt{-16}+2=6+10\sqrt{-1}$;

$3+3\sqrt{-9}-3-2\sqrt{-4}=0+5\sqrt{-1}=5\sqrt{-1}$;

$a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}=2a$.

4) $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2$; (§ 143.)

$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$; (§ 186.)

$(a-b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2-2ab\sqrt{-1}$;

$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})=(x+a)^2+b^2$.

b) In der Analysis wird gezeigt, dass man sowohl aus der positiven als negativen Einheit und mithin aus jeder Grösse so viele verschiedene Wurzeln desselben Grades ziehen kann, als man will; so giebt es z. B. drei verschiedene Grössen, welche auf die 3te Potenz erhoben 8 geben; vier verschiedene Grössen, deren 4te Potenz 1 geben &c., welches hier jedoch nur beiläufig bemerkt sein soll. Man hat nämlich:

$$(+2)^3=8$$

$$(-1+\sqrt{-3})^3=(-1)^3+3(-1)^2\sqrt{-3}+3(-1)(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3$$
$$=-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}=8; \quad (§ 213, 2.)$$

$$(-1-\sqrt{-3})^3=-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3}=8;$$

daher $\sqrt[3]{8}=2; =-1+\sqrt{-3}; =-1-\sqrt{-3}$;

$$1^4=1; \quad (-1)^4=1; \quad (\sqrt{-1})^4=1; \quad (-\sqrt{-1})^4=1;$$

daher $\sqrt[4]{1}=1; \quad =-1; \quad =\sqrt{-1}; \quad =-\sqrt{-1}$;

5) $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1; \quad \frac{6\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=3; \quad \frac{-\sqrt{-1}}{+\sqrt{-1}}=-1;$

$$\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}=\frac{3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=1\tfrac{1}{2}; \quad \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}=-\sqrt{-1};$$

$$\frac{a}{a+\sqrt{-b}}=\frac{a(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})}=\frac{a^2-a\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}{a^2+b};$$

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})}{(a-b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})}=\frac{a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

327.

Wenn man eine zweitheilige Zahlengrösse von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ in's Quadrat erhebt, so ist einleuchtend, dass man (im Allgemeinen) wieder eine zweitheilige Zahlengrösse von der Form $A \pm \sqrt{B}$ erhalten muss, nämlich einen rationalen und einen irrationalen Theil. Es ist z. B.:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6} \ = 5+\sqrt{24}$$
$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = 8-2\sqrt{15} = 8-\sqrt{60}$$

Mithin muss auch umgekehrt die Quadratwurzel aus einer Zahlengrösse von der Form $A \pm \sqrt{B}$, sich allemal durch eine Grösse von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ darstellen lassen, wovon den Umständen nach, eins der beiden Theile auch rational sein kann. Die Regel, nach welcher man diese Wurzel findet, ergiebt sich leicht. Man setze nämlich:

$$\sqrt{(5+\sqrt{24})} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

so folgt: $\quad 5+\sqrt{24} = x+y+2\sqrt{xy}$

Jetzt bestimme man x und y so, dass die rationalen und irrationalen Theile auf beiden Seiten der letztern Gleichung einander gleich werden. Man setze nämlich:

(1) $x+y=5$

(2) $2\sqrt{xy}=\sqrt{24}$

hieraus:

$$x^2+2xy+y^2=25$$
$$4xy=24$$
$$x^2-2xy+y^2=1$$

(3) $x-y=\pm 1$

Aus (1) und (3) folgt: $x=3$ und $y=2$; mithin:

$$\sqrt{(5+\sqrt{24})} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Um $\sqrt{(\pm a \pm \sqrt{-b})}$ z. B. $\sqrt{(-3+\sqrt{-16})}$ zu finden, setze man:

$$\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = \sqrt{x}+\sqrt{-y}$$

hieraus: $\quad -3+\sqrt{-16} = x-y+2\sqrt{-xy}$

(1) $x-y=-3$

(2) $2\sqrt{-xy}=\sqrt{-16}$

$$x^2-2xy+y^2=9$$
$$4xy=16$$
$$x^2+2xy+y^2=25$$

(3) $x+y=\pm 5$

Aus (1) und (3) folgt: $x=1$; $y=4$; mithin:

$$\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = 1+2\sqrt{-1}.$$

328.

Algebraische Ausdrücke in Bruchsform können in besondern Fällen, wenn man statt der allgemeinen Grössenzeichen ihre Zahlenwerthe substituirt, den

Ausdruck $\frac{0}{0}$ geben, den man nicht mit 0 verwechseln oder als bedeutungslos übersehen darf.

Um zuvor zu zeigen, dass der Ausdruck $\frac{0}{0}$ wirklich entstehen kann, und dann im Allgemeinen für jede besondere Substitution, welche ihn erzeugt, auch besondere Bedeutung hat, multiplicire man einmal Zähler und Nenner des algebraischen Ausdrucks $\frac{b(a+b)}{a}$ mit $a-b$, wodurch der Werth desselben nicht geändert ist.

$$\frac{b(a+b)}{a}=\frac{b(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$$

oder: $$\frac{b(a+b)}{a}=\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$$

Beide, nur an Form verschiedene, Ausdrücke müssen einerlei Resultat geben, wenn darin, statt der Buchstaben, beliebige Zahlen substituirt werden. Setzen wir z. B. $a=4$, $b=2$, so ist $\frac{b(a+b)}{a}=3$ und $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}=3$. Setzt man aber $a=4$; $b=4$, so ist: $\frac{b(a+b)}{a}=8$ und $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}=\frac{4.0}{4.0}=\frac{0}{0}$. Nimmt man $a=5$, $b=5$, so giebt der erste Ausdruck 10. der andere wieder $\frac{0}{0}$ &c.

Man sieht also nicht allein, dass für gewisse Zustände von a und b (hier nämlich immer, wenn $a=b$) der Bruch $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$ den an sich unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ giebt, sondern auch, dass der Werth desselben von a und b abhängt. Für $a=5$, $b=5$, ist z B. $\frac{0}{0}=10$; für $a=3$, $b=3$ aber ist $\frac{0}{0}=6$ &c.

Für den vorliegenden Fall könnte man freilich die Ursache, welche den Ausdruck $\frac{b(a^2-b^2)}{a(a-b)}$ zu $\frac{0}{0}$ macht, fortschaffen, indem man diesen Ausdruck durch Division mit dem Nenner in den Zähler auf $\frac{b(a+b)}{a}$ reducirt. Eine solche Reduction ist aber nicht immer möglich, und dann muss man die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{0}{0}$ durch unmittelbare Schlüsse suchen, oder denselben auf andere Weise umgehen.

In der höhern Mathematik kommt der Ausdruck $\frac{0}{0}$ sehr oft vor, dort giebt es aber auch Mittel, die Bedeutung desselben nach gewissen Regeln zu finden. Für die Elemente genügt es vollkommen, darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass der Ausdruck $\frac{0}{0}$ bald diese, bald jene Bedeutung haben kann.

Die Summationsformel für geometrische Progressionen ist:

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}$$

Für den Fall, wo der Exponent $e=1$ (und folglich die Reihe selbst $a+a+a+\ldots\ldots$ wäre, deren Summe offenbar $=na$ ist), giebt die Substitution in obige Formel:

$$s=\frac{a(1^n-1)}{1-1}=\frac{0}{0}=na$$

Der Ausdruck $\frac{\sqrt{(8+a)}-3}{a^2-1}$ führt auf $\frac{0}{0}$, wenn man $a=1$ setzt; dass aber für $a=1$, $\frac{0}{0}=\frac{1}{12}$ sein muss, ist leicht einzusehen, wenn man Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks mit $\sqrt{(8+a)}+3$ multiplicirt, nämlich:

$$\frac{[\sqrt{(8+a)}-3][\sqrt{(8+a)}+3]}{(a^2-1)[\sqrt{(8+a)}+3)]}=\frac{a-1}{(a^2-1)[\sqrt{(8+a)}+3]}$$

Mithin ist:

$$\frac{\sqrt{(8+a)}-3}{a^2-1}=\frac{1}{(a+1)[\sqrt{(8+a)}+3]}$$

329.

Es liegt in der Natur mancher mathematischer Untersuchungen, dass sie unwillkürlich auf die Vorstellung des Unendlichen führen; denn wenn auch der Geist, am Körper gefesselt, seine Grenzen hat, nicht darüber hinaus kann, und also jene Vorstellung auch nicht auf einen Augenblick deutlich zu fassen vermag, so lässt sich doch dadurch die ungebundene Phantasie nicht aufhalten, einen Sprung voraus zu machen, und den Geist auch mit übersinnlichen Vorstellungen zu versorgen. Kein Mensch kann sich z. B. die Zeit, oder den Alles umfassenden Raum anders als unendlich (ohne Ende) denken.

Obgleich nun alle mathematischen Untersuchungen, mit welchen die Vorstellung des Unendlichen wesentlich verbunden ist, in die Analysis des Unendlichen gehören, so giebt es doch unter ihnen ein paar Fälle, welche sich auf elementare Weise behandeln lassen, und da diese Fälle gerade bei Anwendung derjenigen Theile der Mathematik (Mechanik und Geometrie) Statt finden, welche, weil sie täglich vorkommen, in die Elemente aufgenommen sind, und sich doch nicht jeder, der die Mathematik anwenden muss, in den höhern Theilen derselben gleich zurecht finden kann, so mögen dieserhalb, so wie um demjenigen, der die Wissenschaft lieb gewonnen hat und nach erhaltener Weihe in ihr eigentliches Heiligthum und ihren wahren Geist einzudringen wünscht, einen Wink zu geben, einige, wenn auch gleich nicht hierher gehörige Betrachtungen, noch zu Gute gehalten werden. Mit dem Bekenntniss aber, dass die gegebenen Erläuterungsbeispiele und Vergleichungen ein wenig hinken, wollen wir den Leser im Voraus um Nachsicht und Nachhülfe bitten. Was einmal rein geistiger Art ist, kann nur vom Geiste, nicht mit den Händen gefasst werden. Bei übersinnlichen Sachen geht alle Beschreibung betteln, fällt nur zu leicht in logische Kreise und Ungereimtheiten, macht das zu Erklärende eher dunkeler, als klar. Nicht auf d a s muss man sehen, was ausgedrückt i s t, sondern auf das, was man hat ausdrücken w o l l e n. Dies für den Schüler, der da handgreifliche Erklärungen und Beispiele verlangt, wo die Natur der Sache sie nicht gestattet.

Betrachten wir einmal folgende geometrische Progression:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots\cdots\frac{1}{2^n}$$

so ist klar, dass mit dem Fortschreiten dieser Reihe ihre Glieder immer kleiner und kleiner werden, und man daher n so gross annehmen kann, dass $\frac{1}{2^n}$ kleiner ist, als jede namhafte oder angebbare Grösse.

Summirt man nach § 254 einige der ersten Glieder dieser Reihe, so zeigt sich, dass es beinahe einerlei ist, ob man Millionen oder Billionen Glieder summirt. In beiden Fällen kommt die Summe der Einheit sehr nahe. Wie viel Glieder man aber auch zusammenrechnen wollte, nie kann die Summe die Einheit erreichen, noch viel weniger darüber hinaus kommen.

Diese, dem Anfänger befremdende, Behauptung lässt sich folgendermassen leicht darthun. Nimmt man ein beliebig weit hinaus gesetztes $n$tes Glied der

Reihe, nämlich $\frac{1}{2^n}$, als das letzte, so beträgt die Summe bis zu diesem Gliede nach der allgemeinen Summations-Formel: $s = \frac{te - a}{e - 1}$, worin für gegenwärtigen Fall, $a = \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{2^n}$ zu setzen ist (§ 254):

$$s = \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

oder, indem man Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt:

$$s = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Man sieht also, dass s nie grösser als 1 sein, aber auch der Einheit so nahe gebracht werden kann, dass der Unterschied kleiner wird, als jede angebbare Grösse, denn je grösser n, je kleiner der zu subtrahirende Theil $\frac{1}{2^n}$.

Nun fragen wir aber: wie weit muss man die Progression $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ fortlaufen lassen, oder wie gross muss man sich n denken, damit $\frac{1}{2^n}$ und jener Unterschied im Voraus so klein wird, dass hernach keine kleinere Grösse mehr angegeben werden kann?

Antwort. Wie klein man sich auch eine Grösse denken mag, so kann man doch, weil eine wirkliche Grösse angebbar sein muss, immer noch eine kleinere denken. Um also $\frac{1}{2^n}$ im Voraus so klein zu machen, dass dessen Kleinheit durch keine abermalige Annahme wieder überboten werden kann, bleibt nichts Anderes übrig, als den Sprung in's Unendliche zu machen; dies ist aber dann ein wirkliches Non-plus-ultra, denn gäbe es hier ein Jenseits, so gäbe es kein Unendliches und umgekehrt. Man wird also gezwungen, dass n unendlich gross (∞), also $\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty}$ anzunehmen, und mithin die Reihe selbst ohne Ende zu denken; denn eins folgt nothwendig aus dem Andern. So lange nämlich die Glieder der Reihe noch immer kleiner gedacht werden können, ist in der That die Reihe selbst (nämlich die Zahl ihrer Glieder) auch noch nicht wirklich unendlich gedacht. Der Gedanke eines unendlich Grossen ist in jedem Fall eine angestrengte Handlung des Geistes, die niemals zum Schlusse kommt, mithin kein bestimmter, sondern endloser, nicht geschlossener Gedanke; dies drückt schon das Wort unendlich selbst aus. Dennoch ist klar, dass, wenn man die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ (d. h. die Zahl ihrer Glieder) auf einen Augenblick wirklich unendlich gross denken könnte (oder gedacht annimmt), mit dieser Vorstellung dann nothwendig die Vorstellung verbunden wäre, dass ihr letztes Glied wirklich unendlich klein und der Gedanke, dass es noch eine wirkliche (angebbare) Grösse habe, dann nicht mehr möglich ist. Denkt man sich also n unendlich gross, so muss die Reihe selbst in's Unendliche fortlaufen, und ihre, immer um die Hälfte abnehmenden Glieder zuletzt wirklich untheilbar werden. Gegen diese letzte Behauptung pflegt sich aber die gewöhnliche Fassungskraft lange zu sträuben.

Dieser Anstoss fällt aber weg, wenn man sich das ∞ nicht als eine Zahl, d. i. als eine bestimmte Menge Einheiten, sondern als eine Unzahl denkt, die nicht mehr vergrössert werden kann. Hält man diese Vorstellung fest, dass das Unendliche nicht zu überschreiten, mithin nicht zu vergrössern ist, so wird man auch zugeben, dass die Glieder der unendlich gedachten Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$, nicht etwa näherungsweise, sondern in aller Strenge genommen, auf 0 auslaufen müssen. Denn die Glieder werden im Unendlichen kleiner als jede angebbare Grösse. Eine Grösse aber, die ihrer Kleinheit wegen nicht mehr angegeben, also auch nicht mehr getheilt werden kann, ist keine wirkliche Grösse. Dass man aber des Anhalts wegen, und um nur den Faden der Untersuchungen anknüpfen zu können, den im Unendlichen erreichten Zustand einer solchen immer kleiner werdenden Grösse sich noch als etwas Wirkliches einbildet, und, um nur die Rechnung dadurch einzuleiten, mit $\frac{1}{\infty}$ bezeichnet, dieselbe im Vortrage eine unendlich kleine Grösse nennt (verschwindende, untheilbare Grösse, Differential, Fluxion &c., d. h. Anfang oder Bestreben einer nicht angebbaren Sache, die eine Grösse sein oder werden will, es aber nicht ist) und dann des Begriffs und der Form wegen $\frac{1}{\infty}$ (dx) von der absoluten Null unterscheidet, wird man später als nothwendig erkennen. Wir können indessen diese Sache hier nicht weiter erläutern. Sie gehört, wie schon zu Anfang dieses § erwähnt, in die Infinitesimalrechnung. Hierauf müssen wir also Denjenigen verweisen, der Wissbegierde und Sinn für das Höhere fühlt Ein paar Erläuterungs-Beispiele mögen hier aber noch Platz finden, indem sie auf eine anschauliche Weise zeigen, dass die Glieder einer stets abnehmenden geometrischen Reihe nicht allein näherungsweise, sondern zuletzt wirklich untheilbar werden, und daher jene unendlich kleine Grösse $\frac{1}{\infty}$ nur ein Gedankending ist, dessen Grösse, weil nicht mehr messbar, gleich Null gesetzt werden muss.

1) Man denke sich die Lebensdauer eines Menschen als Einheit. Von dieser Zeit wird doch erst die Hälfte $\frac{1}{2}$, verlebt, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte, oder $\frac{1}{4}$ vom Ganzen u. s. f. in's Unendliche, nämlich: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{2^\infty}$. Wer nun aber a sagt, muss auch b sagen. Giebt man zu, dass ein Mensch wirklich sterben, mithin seine Lebenszeit ganz verleben kann, so muss man auch zugeben, dass das letzte Glied seiner Lebensprogression (Grenze), eine wirklich untheilbare Grösse (ein Hauch, ein Augenblick) ist. Denn wäre dies nicht, so würde ja, weil die Zeit eine stetige (fliessende) Grösse ist, wovon kein Theil übersprungen oder ausgelassen werden kann, noch ein Rest zum Nachsitzen bleiben.

Alle wirklichen Grössen stimmen darin mit einander überein, dass jede aus mehreren gleichartigen Theilen besteht, mithin theilbar sein muss, weil man sie sonst nicht mit einer gleichartigen und wirklichen Grösse, als bestimmten und angebbaren Maassstab ausmessen, oder in Zahlen auflösen und mithin auch keinen bestimmten Begriff von deren Quantum haben könnte.

Da nun aber der letzte Augenblick der oben angenommenen Zeiteinheit nicht mehr in bestimmte Theile aufgelöst werden kann, so begreift man auch, dass eine solche untheilbare oder unendlich kleine Grösse $\frac{1}{\infty}$, wenn sie auch noch in der Vorstellung existiren, und nicht mit 0 verwechselt werden soll, doch nicht mit endlichen oder wirklichen Grössen verglichen werden kann; dass ein solches Gedankending etwas unpassend noch Grösse genannt wird, wird der entschuldigen, der für diese übersinnliche Vorstellung keinen bessern Ausdruck weiss.*)

---

*) Eine angebbare Zeit muss Dauer, also Anfang und Ende haben. Ein Augenblick aber (die Augenblicklichkeit) hat keine angebbare Dauer; Anfang

Hiernach ist also klar, dass die häufig vorkommende Redensart: **eine Grösse kann kleiner werden als jede angebbare Grösse**, ganz dasselbe sagt, als: jene Grösse muss im Unendlichen **wirklich** untheilbar werden.

Je mehr Glieder von der Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots$ summirt werden, je kleiner wird der Unterschied, um welchen die Summe von 1 abweicht. Da nun dieser Unterschied mit der Zahl der Glieder immer kleiner wird, und also im Unendlichen kleiner, als jede angebbare Grösse werden muss, so ist klar, dass 1 nicht bloss die Grenze giebt, welche jene Summe nicht zu überschreiten vermag, sondern in aller Strenge **wirklich** die Summe der ganzen unendlichen Reihe ist, denn weil dann in $s=1-\frac{1}{2^{\infty}}$ das Glied $\frac{1}{2^{\infty}}$ untheilbar und $=$ Null zu achten ist, so hat man $s=1$. Man sieht also, dass eine Sache in einem Sinne unendlich und in einem andern wieder endlich sein kann. Die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ in infinitum ist unendlich in Bezug auf die Zahl ihrer Glieder, aber der Betrag derselben dennoch eine endliche Grösse, $=1$.

Merkwürdig ist bei dieser Reihe noch, dass jedes Glied derselben so gross ist, als die Summe aller folgenden:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots\ldots\frac{1}{\infty}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\ldots\ldots\frac{1}{\infty}$$

Anfänger glauben nun aber darin eine Ungereimtheit zu finden, dass, weil jedes vorhergehende Glied zweimal so gross ist, als das nächst folgende: auch das letzte Glied, welches doch 0 sein soll, zweimal genommen dem vorletzten gleich sein müsse und so herauf bis zu Anfang, wo alle Glieder zu 0 würden. Wer aber dermassen philosophirt, ist mit sich selbst im Widerspruch, indem er glaubt, das Unendliche beim Ende und eine absolute Null gefasst zu haben. Weil die Reihe kein Ende hat, so kann auch von einem letzten Gliede nicht die Rede sein. Es verhält sich vergleichungsweise, wie mit einem Kreise, der kein wirkliches Ende hat. Soll er's haben, so muss man es erst hineinlegen. Eben so mit der Reihe, sie hat kein wirkliches Ende; man muss es für den Augenblick annehmen, daher $\frac{1}{\infty}$ (weil nicht angebbar) $=0$ setzen und dann bedenken, dass die Reihe schon mit den vorletzten Gliedern expirirt.

Auch alle übrigen fallenden, unendlichen, geometrischen Reihen können summirt werden. Man hat z. B.:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots\frac{1}{\infty}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}+\ldots\ldots\frac{1}{\infty}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots\ldots\frac{1}{\infty}=\frac{2}{3}$$

2) Nach der § 321 gegebenen Regel findet man den Werth des in's Unendliche fortlaufenden periodischen Decimal-Bruchs $0{,}3636\ldots=\frac{4}{11}$, nämlich:

---

und Ende sind gleichzeitig, und deshalb die Augenblicklichkeit untheilbar. Obwohl nun, wegen dieser Untheilbarheit, dem Augenblick auch keine Grösse (Quantum, d. h. ein bestimmtes Verhältniss zu einem endlichen Maassstabe) zuerkannt werden kann, so ist doch gewiss, dass in unserm Bewusstsein Etwas haftet, was von dem absoluten Nichts (Null) verschieden ist. Kein Mensch kann sich eine Dauer als den Verfluss von lauter Nichts'sen, wohl aber als den Verfluss von lauter untheilbaren und unzähligen Augenblicken denken.

$$s = 0{,}363636 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$100s = 36{,}363636 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$99s = 36$$
$$s = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}$$

Obgleich durch das Resultat von der Richtigkeit dieser Regel vollkommen überzeugt, so pflegen doch gute Köpfe, welche allenthalben auf den Grund gehen und Ursache und Wirkung kennen wollen, die scheinbar gegründete Einwendung zu machen, dass die Reihe der Decimalstellen in der 2ten Gleichung, wegen Vorrückung des Decimalzeichens, um zwei Glieder kürzer geworden sei, als die erste, und mithin die Differenz beider Reihen Decimalen, streng genommen, nicht 0 sein könne, weil, wenn auch erstere in's Unendliche gehe, letztere doch noch zwei Glieder davon entfernt sei.

Dies ist aber wieder ein Fehlschluss, der von den Fesseln des Geistes herrührt, welcher der Phantasie nicht folgen kann und immer wieder in seine Schranken zurückfällt. Wie könnte wohl der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen durch zwei Schritte geschehen? Die vermeintlichen beiden Glieder, um welche die eine Reihe tiefer in's Unendliche gehen soll, sind 0. Das Unendliche kann durch keine endliche Grösse vergrössert oder verkleinert werden. Beide Reihen Decimalen gehen in's Unendliche (ohne Aufhören) fort, und daher gleich weit. ($\infty \pm a = \infty$.)

Man kann aber auch hier die Sache wieder anschaulich machen und die zweite Gleichung aus der ersten entstehen lassen, indem man der ersten Reihe Decimalen zwei Glieder vorsetzt, oder 36 Ganze dazu addirt, indem wirklich:

$$s = \tfrac{4}{11} = 0{,}3636\ldots\ldots$$
$$\text{und } 100s = 36\tfrac{4}{11} = 36{,}3636\ldots\ldots$$
$$\text{mithin: } 99s = 36 = 36{,}0000\ldots\ldots$$

3) Um das eben Gesagte noch von einer andern Seite zu beleuchten, wollen wir die Perioden des Bruchs 0,3636.... wie eine geometrische Reihe summiren. Man kann nämlich die Perioden als Glieder einer solchen Reihe betrachten, wo dann $\tfrac{36}{100}$ das erste Glied, $\tfrac{1}{100}$ der Exponent, und die Anzahl der Glieder $= \infty$ ist, und daher ein letztes Glied $\frac{1}{\infty} = 0$ annehmen. Es ist:

$$s = 0{,}3636\ldots = \tfrac{36}{100} + \tfrac{36}{10000} + \tfrac{36}{1000000} + \ldots \frac{1}{\infty}$$

$$\text{mithin: } s = \frac{\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1}{100} - \frac{36}{100}}{\frac{1}{100} - 1} = \frac{0 - \frac{36}{100}}{-\frac{99}{100}} = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}.$$

330.

Unter dem Titel „mathematische Sophismen“ hat Herr Viola eine kleine Sammlung von Trugschlüssen, jedoch ohne Aufdeckung derselben, herausgegeben, (Wien 1850). Dazu aufgefordert, wollen wir hier ein paar der verfänglichsten derselben nachweisen.

Zuerst beweis't Herr Viola folgendermassen, dass 4 grösser, als 12 ist:

$$\begin{array}{rl} \text{Es ist offenbar:} & +7 > +5 \\ \text{addirt:} & -8 = -8 \\ \hline & -1 > -3 \\ \text{multiplicirt:} & -4 = -4 \\ \hline & 4 > 12 \end{array}$$

Unter den Grundsätzen, welche Viola, als unumstösslich, vorausschickt und worauf er seine Schlüsse baut, wie z. B. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches &c. &c., kommt auch der Satz vor: „Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt Ungleiches und zwar dort das Grössere, wo der grössere Summand genommen wurde.“

Dieser letztere Satz ist aber nicht allgemein, sondern nur für den speciellen Fall gültig, wo die, aus der gegebenen Ungleichheit, durch Addition oder Subtraction gezogene neue Ungleichheit ganz dieselben Vorzeichen hat, Beispiel (1).

1	2	3
$+7 > +5$	$+7 > +5$	$+8 > +5$
$-4 = -4$	$-8 = -8$	$-6 = -6$
$+3 > +1$	$-1 < -3$	$+ \ldots\ldots -$

Kehren die Vorzeichen sich um, so muss allemal auch das Ungleichheitszeichen umgedreht werden, Beispiel (2). Kommen beiderseits des Resultats entgegengesetzte Vorzeichen, Beispiel (3), so ist gar keine Grössenvergleichung möglich und das Ungleichheitszeichen hat dann keinen Sinn mehr, weil man, in Betreff des Grösser oder Kleiner, nur ganz gleichartige Grössen mit einander vergleichen und z. B. nicht sagen kann, dass 3 Minuten mehr ist, als 2 Thaler, oder dass $+3$ mehr ist, als -2.

Die Vorzeichen $+$, $-$ sind hier gleichsam Eigenschaftswörter (§ 126, Anmrkg 2). Eine Zahl absolut (beziehungslos) gedacht, hat gar kein Vorzeichen.

Die alte falsche Vorstellung, dass negative Grössen kleiner als positive, ja gar kleiner als Nichts seien, entsprang aus der Vergleichung von Vermögen mit Schulden, indem man sagte: wenn eine Person A Schulden hat, so hat sie weniger als Nichts. Schulden mögen der Person A noch verwünschbarer, als Nichts sein; Wünsche aber kann die Mathematik nicht berücksichtigen. Eine Grösse, kleiner als Null, ist unmöglich.

331.

Folgendermassen wird nun bewiesen, dass alle Zahlen einander gleich sind. Es sei $a > b$ und $a - b = c$, dann ist:

$$(a-b)(a-b) = (a-b)c\,,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-ac + ab - b^2 = -ac + ab - b^2$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$a(a-b-c) = b(a-b-c) \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$a = b$$

Aus der Voraussetzung $a - b = c$ folgt: $ab - b^2 = bc$. Es ist also auf beiden Seiten der Gleichung (1) die gleiche entgegengesetzte Grösse $-ac + bc$ addirt und die Gleichung (2) eigentlich: $0 = 0$. Da jedoch auf diese Weise, beiderseits der gemeinschaftliche Factor $a - b - c$ hinein practisirt worden, der, wie aus $a - b = c$ folgt: $= 0$ ist, so ist die Gleichung (3) $a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0$. Wenn aber in einem Product ein Factor Null ist, so ist das ganze Product $= 0$, die übrigen Factoren mögen sein, was sie wollen, weil man eine Null nicht multipliciren, überhaupt keine arithmetische Operationen damit vornehmen kann.

332.

Auf folgende Weise wird bewiesen, dass fünf gleich vier ist. Es sei $x = 5$ und $z = 4$, so ist:

$$x+z=9 \text{ und}$$
$$(x+z)(x-z)=9(x-z)$$
$$x^2-z^2=9x-9z$$
$$z^2-9x=z^2-9x$$

$$x^2-9x=z^2-9z$$
$$x^2-9x+\tfrac{81}{4}=z^2-9z+\tfrac{81}{4}$$
$$(x-\tfrac{9}{2})^2=(z-\tfrac{9}{2})^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x-\tfrac{9}{2}=z-\tfrac{9}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$x=z$$

Die Gleichung (2) ist falsch. Setzt man in (1) statt x und z ihre, keinesweges gesuchten, sondern im Voraus bestimmten Werthe, so sieht man, dass die Wurzel linker Hand positiv $=\frac{1}{2}$, rechter Hand aber negativ $=-\frac{1}{2}$ ist. Die Gleichung (2) ist also, richtig geschrieben: $x-\frac{9}{2}=-(z-\frac{9}{2})$, woraus wieder $x+z=9$ (§ 216, Anmrkg.). Der Grundsatz: Gleiches gleich behandelt, giebt Gleiches, ist richtig. Umgekehrt kann man aber nicht sagen: dass Grössen, die gleich behandelt, Gleiches geben, auch immer gleich seien. Aus $(+a)^2=(-a)^2$ folgt nicht, dass $+a$ gleich $-a$ ist.

333.

Schliesslich wollen wir noch die Behauptung widerlegen, dass es Gleichungen mit einer unbekannten Grösse giebt, die gar keine Wurzeln haben. Es sei, heisst es:

$$1+\sqrt{x-1}=+\sqrt{x-4} \text{ folglich (§ 230)}$$
$$x=5$$

Dieser Werth von x leistet der gestellten Forderung nicht Genüge. Woran liegt das? Antwort: weil hier etwas ganz Unmögliches gefordert wird und weil man aus falschen Voraussetzungen, wie z. B. $8=5$ keine Wahrheiten folgern kann. Denn bevor man anfing zu rechnen, konnte man schon sehen, dass die aufgestellte Voraussetzung (Gleichung) falsch ist. Erstlich kann offenbar x keine positive Zahl, grösser als 4, sein, weil dann schon $\sqrt{x-1}>\sqrt{x-4}$ ist. Zweitens kann x auch nicht kleiner als 4, oder kleiner als 1, oder negativ sein, weil eine laterale Grösse nicht einer complexen oder einer reellen Grösse gleich sein kann. Aus demselben Grunde kann x auch keine laterale und auch keine complexe Grösse sein. Aber, frägt man, woher kommt es denn, dass die Rechnung doch den Werth $x=5$ giebt? Wir haben schon bemerkt, dass Grössen, die gleich behandelt auf Gleiches führen, nicht immer gleich sind. Nimmt man von dem doppelten Vorzeichen der Wurzel das untere (§ 216, Anmrkg.), so wird aus der Ungleichheit eine mögliche Gleichheit, nämlich:

$$1-\sqrt{x-1}=-\sqrt{x-4}$$

die ganz so behandelt $x=5$ giebt. Es ist bei arithmetischen Operationen immer zu beachten, dass die mathematischen Zeichen nicht dazu dienen sollen, um daraus, in gedankenlosem Spiele, Wahrheiten abzuleiten, sondern wie die Buchstaben nutzen, um das als möglich und wahr Erkannte dem Papier anzuvertrauen.

Von demselben Verfasser ist in demselben Verlage erschienen:

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.